Formules et Algorithmes pour évaluer π.

Gérard Sookahet
Mars 1998
v2.0

Bonjour Noble Lecteur
Vous trouverez dans ce qui suit une liste de formules et d'algorithmes permettant d'évaluer π avec plus ou moins de précision. Parfois y figure un contexte historique, des références bibliographiques ou des démonstrations. Cette liste n'est évidemment pas exhaustive. Il y a, sans nul doute, au moment où vous lisez ces lignes, des personnes qui s'attachent à nous faire découvrir l'esthétique mathématique de nouvelles formules.

1)

$$\pi \approx \frac{22}{7} = 3.1428\ldots$$

Cette approximation était connue d'Archimède de Syracuse(287-212 avant J.C.). Ce dernier avait construit l'encadrement:

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}$$

2)

$$\pi \approx \frac{377}{120} = 3.1416\ldots$$

Cette approximation est le fait de l'astronome-mathématicien et géographe Claude Ptolémée d'Alexandrie aux environs de 150 après J.C. . Elle était aussi connue de Al'Khwarizmi aux environs de 800 après J.C. .

3)

$$\pi \approx \frac{5}{4} + \frac{\sqrt{229}}{8} = 3.1415932\ldots$$

C'est l'une des racines de l'équation $64x^2 - 160x - 129 = 0$.

4)

$$\pi \approx \frac{355}{113} = 3.1415929\ldots$$

Cette approximation fût redécouverte par Adrien Métius(1571-1635). En fait cette fraction, ainsi que 22/7, est une réduite d'un développement en fraction continue de π:

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cdots}}}}}}}$$

Ainsi nous pouvons en extraire les fractions suivantes:

$$\frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \frac{103993}{33102}, \frac{1019514486099146}{324521540032945}, etc \ldots.$$

On constate que 103993/33102 est déjà une bonne approximation(8 décimales). C'est en partie grâce au 292 présent dans la fraction continue.

5)

$$\pi \approx \frac{167}{80} + \frac{\sqrt{10}}{3} = 3.1415925534\ldots$$

C'est l'une des racines de l'équation $57600x^2 - 240480x - 187001 = 0$.

6)

$$\pi \approx \left(97 + \frac{1}{2} - \frac{1}{11}\right)^{1/4} = 3.1415926526\ldots$$

Cette étrange approximation est le fait de Srinivasa Aaiyangar Ramanujan (1887-1920). On peut la trouver dans [1][2]. Le raisonnement qui a conduit à ce résultat part de la constation suivante:

$$\pi^4 = 97.409091084002 \ldots.$$

Ainsi 09 apparaît deux fois dans les décimales de π^4. Ensuite, on peut dire que 10 est proche de 09. D'où:

$$97.40909090909 \ldots. = \frac{2143}{22} = 97 + \frac{1}{2} - \frac{1}{11}$$

Mais Ramanujan n'en resta pas là [3]. A partir de cela, il établit un développement en fraction continue de π^4:

$$\pi^4 = 97 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{16539 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}}}}$$

7)

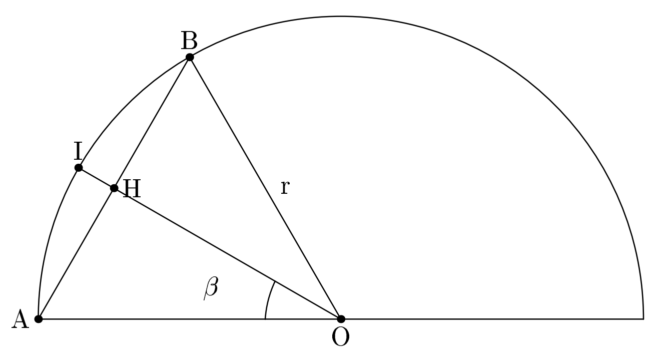
$$\pi \approx \frac{103993}{33102} = 3.141592654\ldots$$

cf. 4)

8)

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}....}}}$$

Cette formule est due au mathématicien français François Viète(1540-1603) et date de 1593 [57]. Elle lui permit de calculer 9 décimales. Il fût le premier à présummer de l'incommensurabilité de π et aussi le premier à représenter π à l'aide d'une expression analytique telle qu'une série infinie.
Cette formule est issue de la méthode des polygones inscrits utilisées par Archimèdes de Syracuse [52][53].



Ainsi si l'on considère un n-gone inscrit dans un cercle de rayon $r = 1$, alors son aire sera $A_n = n \cdot S(OAB)$. Sachant que $S(OAB)$ désigne l'aire du triangle OAB.

Nous avons:

$$S(OAB) = OH \cdot HA = \sin\beta\cos\beta = \frac{1}{2}\sin 2\beta$$

D'où:

$$A_n = \frac{n}{2}\sin 2\beta = n\sin\beta\cos\beta$$

Selon le même raisonnement, l'aire d'un 2n-gone sera:

$$A_{2n} = 2n \cdot S(OAI) = 2n\frac{1}{2}\sin\beta$$

Faisons le rapport suivant:

$$\frac{A_n}{A_{2n}} = \frac{n\sin\beta\cos\beta}{n\sin\beta} = \cos\beta$$

De même nous avons:

$$\frac{A_{2n}}{A_{4n}} = \cos(\frac{\beta}{2})$$

Et en généralisant:

$$\frac{A_n}{A_{2^k n}} = \frac{A_n}{A_{2n}} \cdot \frac{A_{2n}}{A_{4n}} \cdot \frac{A_{4n}}{A_{8n}} \cdots \frac{A_{2^{k-1}n}}{A_{2^k n}} = \cos\beta\cos(\frac{\beta}{2})\cos(\frac{\beta}{4})\ldots\cos(\frac{\beta}{2^{k-1}})$$

Ainsi quand k tend vers l'infini, l'aire du polygone $A_{2^k n}$ inscrit dans le cercle de rayon $r = 1$ tend vers l'aire de ce dernier, c'est à dire π.
Donc:

$$\pi = \lim_{k\to+\infty} \frac{A_n}{\cos\beta\cos(\frac{\beta}{2})\cos(\frac{\beta}{2^2})\ldots\cos(\frac{\beta}{2^k})}$$

Et:

$$\pi = \frac{\frac{1}{2}n\sin 2\beta}{\cos\beta\cos(\frac{\beta}{2})\cos(\frac{\beta}{2^2})\ldots\cos(\frac{\beta}{2^k})}$$

En prennant $n = 4$, François Viète [35] obtient $\cos\beta = \sqrt{1/2}$ et $\sin 2\beta = 1$.
Puis en utilisant l'une des formules de bissection:

$$\cos^2(\frac{\beta}{2}) = \frac{1}{2}(1 + \cos\beta),$$

il établit sa formule.

9)

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdot 8\ ....}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdot 9\cdot 9\ ....}=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2}{4n^2-1}$$

C'est la fameuse formule du mathématicien britannique John Wallis(1616-1703). Il la découvrit en 1655 et la publia dans *Arithmetica Infinitorum.* Cette formule est facile à établir. Pour résumer sa démonstration, il faut d'abord prouver la formule de récurrence suivante par une double intégration par parties:

$$\int_0^{\pi/2}\sin^n x dx=\frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2}\sin^{n-2} x dx \quad (n>2)$$

Ce qui nous donne:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2}\sin^{2k+1} x ds &= \frac{2k(2k-2)\ldots\ldots 4\cdot 2}{(2k+1)(2k-1)\ldots\ldots 5\cdot 3}1\\ \int_0^{\pi/2}\sin^{2k} x ds &= \frac{(2k-1)(2k-3)\ldots\ldots 3\cdot 1}{2k(2k-2)\ldots\ldots 4\cdot 2}\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Il suffit ensuite de diviser membre à membre les deux égalités et de montrer que le quotient des deux intégrales tend vers 1 quand k tend vers l'infini. Ceci établit la formule de Wallis.
Cette dernière peut aussi s'exprimer différemment:

$$\frac{\pi}{2}=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)},$$

où comme dans [39]:

$$\pi=2\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{2^{2n}}{\binom{2n}{n}}\right]^2$$

A partir de la fomule de Wallis, on peut aussi obtenir la série suivante:

$$\pi=\frac{2}{1!}+\frac{(1!)^2 2^2}{3!}+\frac{(2!)^2 2^3}{5!}+\frac{(3!)^2 2^4}{7!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

Pour finir notons que Wallis introduisit le symbole qui désigne de nos jours l'infini: ∞.

10)

$$\pi = \cfrac{4}{1+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\cfrac{7^2}{2+\cfrac{9^2}{2+\cdots}}}}}}$$

Cette formule est due à Lord William Brouncker(1620-1684) et date de 1655. Son contexte historique est asssez intéressant. En effet, Lord W. Brouncker n'était pas mathématicien mais homme politique et 1^{er} Président de la Royal Society. C'était un ami de John Wallis. Ce dernier, connaissant son penchant pour les mathématiques, lui avait communiqué sa dernière découverte(cf. 9)). Ainsi c'est à partir de la formule de Wallis qu'il construisit cette formule sans pour autant en donner une démonstration claire. C'est Leonhard Euler(1707-1783) qui s'en chargea bien plus tard. La démonstration d'Euler figure dans [37]. Il mit en évidence cette remarquable formule dans un cas plus général:

$$\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_4}+\cdots = \cfrac{1}{a_1+\cfrac{a_1^2}{a_2-a_1+\cfrac{a_2^2}{a_3-a_2+\cfrac{a_3^2}{a_4-a_3+\cfrac{a_4^2}{a_5-a_4+\cdots}}}}}$$

En utilisant la formule de Gregory-Leibniz(cf. 12)) on retrouve la formule de Brouncker. Wallis avait parlé de cette formule à Huygens et ce dernier pensait qu'elle était fausse.
Notons qu'il ne s'agit pas d'une fraction continue comme on l'entend d'habitude. On parle alors de *fraction continue généralisée.*

11)

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4}+24\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{5\cdot 2^5}-\frac{1}{28\cdot 2^7}-\frac{1}{78\cdot 2^9}-\ldots\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}+24\int_0^{1/4}\sqrt{x-x^2}\,dx$$

Cette formule est due à Sir Isaac Newton(1642-1727) et date de 1666. Elle fût construite à partir d'une série dérivant d'un développement de la fonction arcsinus. Cela permit à newton de calculer π avec 15 décimales(le calcul fût fastidieux!).
Quant au développement en série de $\arcsin x$, il s'écrit:

$$\arcsin x = x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7}+\ldots$$

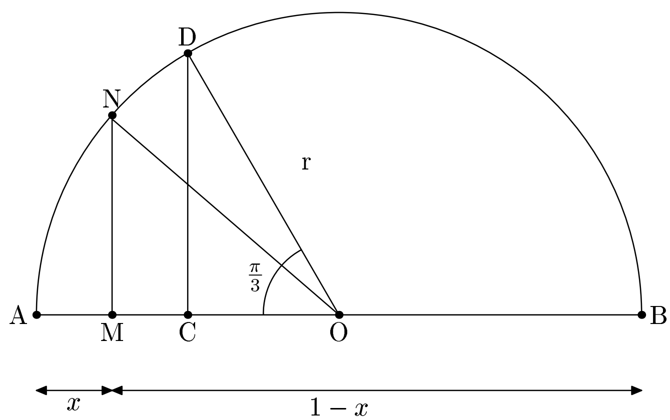
D'où l'on peut en déduire:

$$\frac{\pi}{2} = \arcsin 1 = 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{1}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{1}{7} + \dots$$

Cependant il y a un peu plus rapide:

$$\frac{\pi}{6} = \arcsin(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{(2)\cdot 3\cdot 2^3} + \frac{1\cdot 3}{(2\cdot 4)\cdot 5\cdot 2^5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{(2\cdot 4\cdot 6)\cdot 7\cdot 2^7} + \dots$$

La démonstration de la formule de Newton figure dans le fameux "*Traité de la méthode des fluxions et des séries infinies*".



Considérons un cercle de rayon $r = 1/2$. l'astuce consiste à calculer l'aire du domaine ACD délimité par les segments AC, CD et l'arc de cercle AD par des voies géométriques et analytiques. Ensuite il suffit d'égaler les deux résultats. Géométriquement nous avons:

$$S(ACD) = S(AOD) - S(triangle(ODC))$$

,où $S(\ )$ désigne une surface.
Cela nous fait:

$$\begin{aligned} S(ACD) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3}\cdot\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{3}\right) \\ S(ACD) &= \frac{\pi}{24} - \frac{\sqrt{3}}{32} \end{aligned}$$

D'un point de vue analytique nous avons:

$$S(ACD) = \int_0^{1/4} MN dx$$

Or $MN^2 = AM \cdot MB = x(1-x)$. Ce résultat peut-être établit en appliquant le théorème de Pythagore aux triangles rectangles ANB, ANM et

ANB.
D'où:

$$S(ACD) = \int_0^{1/4} \sqrt{x}\sqrt{1-x}dx$$

Faisons un développement en série de $\sqrt{1-x}$:

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^5 - \dots$$

En multipliant par $\sqrt{x}$ il vient:

$$\sqrt{x}\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x^{1/2} - \frac{1}{2\cdot 4}x^{2+1/2} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^{3+1/2} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^{5+1/2} - \dots$$

En intégrant les termes de la série:

$$\int_0^{1/4} \sqrt{x}\sqrt{1-x}dx = [\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{2}\frac{2}{5}x^{5/2} - \frac{1}{2\cdot 4}\frac{2}{7}x^{7/2} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{2}{9}x^{9/2} - \dots]_0^{1/4}$$

Ainsi nous avons:

$$\frac{\pi}{24} - \frac{\sqrt{3}}{32} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2^3} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2^5} - \frac{1}{2\cdot 4}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{2^7} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{2^9} - \dots$$

En isolant π dans cette dernière égalité, on trouve la formule de Newton.

12)

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$$

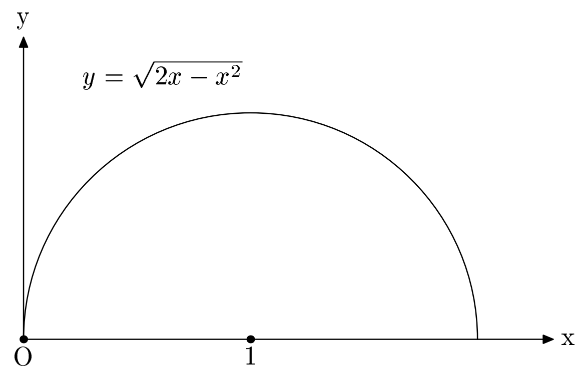
Cette formule est attribuée à la fois au mathématicien-astronome écossais James Gregory(1638-1675) en 1671 et au mathématicien-philosophe allemand Gottfried Wilhelm Leibniz(1646-1716) en 1674. Elle résulte du développement en série de la fonction arctangente en $x = 1$.

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \dots$$

Son utilisation n'est pas très pratique. Pour obtenir une précision de 3 décimales, il faut sommer à peu près 500 termes, 10 fois plus pour 4 décimales, 100 fois plus pour 5 décimales, ...etc
Néanmoins il est possible d'améliorer la précision pour un même nombre de termes en appliquant une transformation d'Euler[3]. A titre d'exemple une transformation d'Euler peut donner:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n-1}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

Historiquement il semblerait que Leibniz ne connaissait pas le développement de la fonction arctangente tel que nous le connaissons aujourd'hui. Voici les grandes lignes de sa démonstration pour en arriver à sa formule:



Il considère le demi-cercle de rayon 1 tangent à l'axe Oy en O. Son équation s'écrit $y = \sqrt{2x - x^2}$.
Puisque:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1-x}{y}$$

Il pose:

$$z = y - x\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{x}{2-x}}$$

D'où:

$$x = \frac{2z^2}{1+z^2}$$

Sachant que l'aire d'un quart de cercle vaut $\pi/4$, nous avons:

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{4} &= \int_0^1 y dx \\
&= \frac{1}{2}([x\sqrt{2x - x^2}]_0^1 + \int_0^1 z dx) \\
&= \frac{1}{2}[1 + (1 - \int_0^1 x dz)]
\end{aligned}$$

C'est l'un des points les plus confus de sa démonstration. Les deux égalités précédentes se jusitifient par des considérations géométriques en tenant compte du fait que:

$$\int_0^1 x dz + \int_0^1 z dx = 1$$

Nous avons par la suite:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \int_0^1 \frac{z^2 dz}{1+z^2}$$

On reconnait une progression géométrique, d'où:

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{4} &= 1 - \int_0^1 z^2(1 - z^2 + z^4 - z^6 + \ldots)dz \\
&= 1 - \left[\frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{5}z^5 + \frac{1}{7}z^7 - \ldots\right]_0^1
\end{aligned}$$

En fin de compte:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \ldots$$

Pour en terminer, Leibniz et Gregory ne furent pas les seules à avoir découvert cette formule indépendamment. En effet, en 1682, Th. F. De Lagny avait lui aussi trouvé cette série. Qui plus est, en posant $x = 1/\sqrt{3}$ dans le développement de arctangente, il obtint:

$$\frac{\pi}{6} = \arctan(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + \ldots\right)$$

Avec les 9 premiers termes, on obtient une précision de 4 décimales. Th. F. De Lagny calcula 210 décimales de π en 1719 en utilisant cette série. Deux ans avant Abraham Sharp en avait calculé 72. Dernière minute: il semblerait qu'un certain *Mādhava* aurait aussi découvert la formule de Leibniz-Gregory-De Lagny.

13)

$$\frac{\pi\sqrt{2}}{4} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \ldots$$

14)

$$\frac{\pi - 3}{4} = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7 \cdot 8} + \frac{1}{9 \cdot 10 \cdot 11} + \ldots$$

15)

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$$

Cette formule fût trouvée par John Machin en 1706. Le calcul s'effectue en utilisant le développement en série de $\arctan x$:

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \ldots$$

Ce qui nous donne:

$$\frac{\pi}{4} = 4\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)5^{2k+1}} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)239^{2k+1}}$$

La formule de Machin combine deux avantages. En effet, le second terme converge très vite tandis que le premier est pratique à calculer car il fait intervenir le chiffre 5. Ce mathématicien fût le premier à calculer 100 décimales de π. Les formules qui suivirent par la suite pour calculer π, à la main et un peu par ordinateur, furent des variantes de la formule de Machin, et ce jusqu'en 1970.
Pour établir sa formule, John Machin partit de l'identité suivante:

$$\arctan u + \arctan v = \arctan\left(\frac{u+v}{1-uv}\right)$$

En posant $u = v = 1/5$, il obtient:

$$2\arctan\frac{1}{5} = \arctan\left(\frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{25}}\right) = \arctan\frac{5}{12}$$

Ensuite, il pose $u = v = 5/12$, ce qui donne:

$$2\arctan\frac{5}{12} = \arctan\left(\frac{\frac{5}{12}}{1-\frac{25}{144}}\right) = \arctan\frac{120}{119}$$

Puis en posant $u = 120/119$ et en cherchant v tel que:

$$\frac{u+v}{1-uv} = 1,$$

il vient:

$$v = \frac{1-u}{1+u} = -\frac{1}{239}$$

Finalement en recombinant toutes ces égalités, il aboutit à sa formule. Historiquement, Reitweisner calcula 2037 décimales de π en 1949 sur le célèbre ENIAC en 70 heures en utilisant la formule de Machin. En 1958, Genuys calcula 10000 décimales sur un IBM 704 en 100 minutes.
Les formules du type de celle de Machin sont nombreuses et existaient déjà bien avant. Le grand mérite de John Machin est d'en avoir découvert une avec des coefficients pertinents.

Parmi les variantes de ce type de formule, il y a par exemple:

- Leonhard Euler en 1764:

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4} &= 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{70} + \arctan\frac{1}{99} \\ \frac{\pi}{4} &= 5\arctan\frac{1}{7} + 2\arctan\frac{3}{79}\end{aligned}$$

  Cette dernière formule permit au prodige du calcul que fût Euler de calculer 20 décimales de π en une heure.
  On lui doit aussi cette formule pour tout entier n et m:

$$\arctan\frac{1}{n} = \arctan\frac{1}{n+m} + \arctan\frac{m}{n^2+nm+1}$$

  Qui plus est, on doit à Euler d'avoir imposé la notation standard de π en 1737 bien que la première tentative fût attribuée au mathématicien gallois William Jones en 1706. Cependant, à l'origine, cette notation de π est due à Adrien Romanus(1561-1615) qui avait pris la première lettre du mot circonférence en grec: $\pi\varepsilon\rho\iota\varphi\varepsilon\iota\alpha$. Ce dernier avait aussi calculer 17 décimales de π en 1593 en utilisant la méthode d'Archimède.

- Herman en 1706:

$$\frac{\pi}{4} = 2\arctan\frac{1}{2} - \arctan\frac{1}{7}$$

- Hutton en 1776:

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4} &= \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3} \\ \frac{\pi}{4} &= 2\arctan\frac{1}{3} + \arctan\frac{1}{7}\end{aligned}$$

- Vega(1754-1802):

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4} &= 5\arctan\frac{1}{7} + 2\arctan\frac{3}{79} \\ \frac{\pi}{4} &= 2\arctan\frac{1}{3} + \arctan\frac{1}{7}\end{aligned}$$

  En 1789 Vega calcula 126 décimales, et en 1794, 136 décimales.

– Strassnitzky en 1840 et Dase en 1844:

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{8}$$

Johann Dase calcula 200 décimales de π avec cette formule.

– Carl Störmer en 1896:

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{4} &= 3\arctan\frac{1}{4} + \arctan\frac{1}{20} + \arctan\frac{1}{1985} \\
\frac{\pi}{4} &= 6\arctan\frac{1}{8} + 2\arctan\frac{1}{57} + \arctan\frac{1}{239} \\
\frac{\pi}{4} &= 10\arctan\frac{1}{22} + 7\arctan\frac{1}{41} + 12\arctan\frac{1}{75} + 2\arctan\frac{1}{4193} \\
\frac{\pi}{4} &= 44\arctan\frac{1}{57} + 7\arctan\frac{1}{239} + 12\arctan\frac{1}{682} + 24\arctan\frac{1}{12943} \\
\frac{\pi}{4} &= 88\arctan\frac{1}{172} + 51\arctan\frac{1}{239} + 32\arctan\frac{1}{682} \\
&+ 44\arctan\frac{1}{5357} + 68\arctan\frac{1}{12943}
\end{aligned}$$

L'avant-dernière formule servit en 1961 à Shanks et Wrench [9] pour calculer 100 265 décimales en 8 heures sur un IBM 7090.

– Karl Friedrich Gauss:

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{4} &= 12\arctan\frac{1}{18} + 8\arctan\frac{1}{57} - 5\arctan\frac{1}{239} \\
\frac{\pi}{4} &= 12\arctan\frac{1}{38} + 20\arctan\frac{1}{57} + 7\arctan\frac{1}{239} + 24\arctan\frac{1}{268} \\
\frac{\pi}{4} &= 2085\arctan\frac{1}{5257} - 398\arctan\frac{1}{9466} + 1950\arctan\frac{1}{12943} \\
&+ 1850\arctan\frac{1}{34208} + 2021\arctan\frac{1}{44179} + 2097\arctan\frac{1}{85353} \\
&+ 1484\arctan\frac{1}{114669} + 1389\arctan\frac{1}{330182} + 808\arctan\frac{1}{485298}
\end{aligned}$$

– A.A. Bennet en 1926:

$$\frac{\pi}{4} = 12\arctan\frac{1}{18} + 3\arctan\frac{1}{70} + 5\arctan\frac{1}{99} + 8\arctan\frac{1}{307}$$

– D.H. Lehmer en 1938:

$$\frac{\pi}{4} = 12\arctan\frac{1}{18} + 8\arctan\frac{1}{99} + 3\arctan\frac{1}{239} + 8\arctan\frac{1}{307}$$

cf. [48].

– Klingstierna:

$$\frac{\pi}{4} = 8\arctan\frac{1}{10} - \arctan\frac{1}{239} - 4\arctan\frac{1}{515}$$

– Escott:

$$\frac{\pi}{4} = 22\arctan\frac{1}{28} + 2\arctan\frac{1}{443} - 5\arctan\frac{1}{1393} - 10\arctan\frac{1}{11018}$$

– E. Rutherford:

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{70} + \arctan\frac{1}{99}$$

– C-.L. Hwang en 1997:

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4} &= 183\arctan\frac{1}{239} + 32\arctan\frac{1}{1023} - 68\arctan\frac{1}{5832} \\ &+ 12\arctan\frac{1}{110443} - 12\arctan\frac{1}{4841182} - 100\arctan\frac{1}{6826318}\end{aligned}$$

Cette formule qui date de Mars 1997 est l'une des plus efficaces [54][55].

Il y en a bien d'autres parmi lesquelles:

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4} &= 2\arctan\frac{1}{4} + \arctan\frac{1}{7} + 2\arctan\frac{1}{13} \\ \frac{\pi}{4} &= 2\arctan\frac{1}{2} - \arctan\frac{1}{9} - \arctan\frac{1}{32} \\ \frac{\pi}{4} &= 5\arctan\frac{1}{8} + 2\arctan\frac{1}{18} + 3\arctan\frac{1}{57} \\ \frac{\pi}{4} &= 6\arctan\frac{1}{8} + \arctan\frac{5}{99} - 3\arctan\frac{1}{268} \\ \frac{\pi}{4} &= 8\arctan\frac{1}{10} - 2\arctan\frac{2543}{452761} - \arctan\frac{1}{1393} \\ \frac{\pi}{4} &= 3\arctan\frac{1}{7} + 4\arctan\frac{1}{13} + 2\arctan\frac{1}{55} + 2\arctan\frac{1}{123} \\ \frac{\pi}{4} &= 10\arctan\frac{1}{17} + 2\arctan\frac{1}{38} + 7\arctan\frac{1}{41} - 4\arctan\frac{1}{157} \\ \frac{\pi}{4} &= 20\arctan\frac{1}{57} + 24\arctan\frac{1}{68} + 12\arctan\frac{1}{117} - 5\arctan\frac{1}{239} \\ \frac{\pi}{4} &= 68\arctan\frac{1}{99} - 12\arctan\frac{1}{117} + 39\arctan\frac{1}{239} \\ &+ 20\arctan\frac{1}{307} - 24\arctan\frac{1}{882}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{4} &= 95\arctan\frac{1}{239} + 44\arctan\frac{1}{515} + 32\arctan\frac{1}{682} \\
&+ 176\arctan\frac{1}{782} + 88\arctan\frac{1}{4030} + 112\arctan\frac{1}{12943} \\
\frac{\pi}{4} &= 44\arctan\frac{1}{515} + 95\arctan\frac{1}{538} + 127\arctan\frac{1}{682} \\
&+ 176\arctan\frac{1}{782} + 95\arctan\frac{1}{1068} + 88\arctan\frac{1}{4030} \\
&+ 17\arctan\frac{1}{12943}
\end{aligned}$$

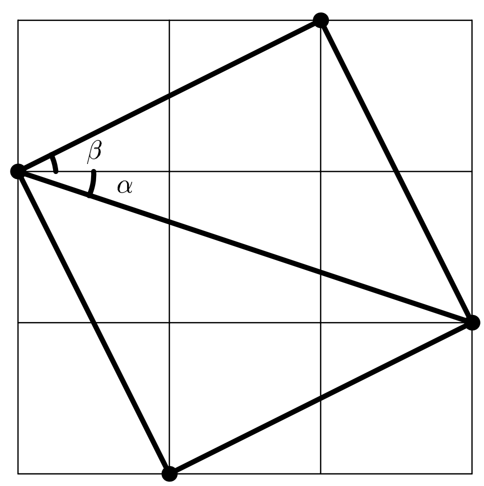
Les nombres de Fibonacci peuvent aussi intervenir:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{F_{2n+1}}\right)$$

,où F_n représente le $n^{ième}$ nombre de la suite de Fibonacci.
Toutes ces formules se calculent en faisant appel à des notions issues de la Théorie des Nombres telles que les nombres premiers et les entiers gaussiens [41]. Pour en savoir plus sur ce type de formules, voir [4][5][6][7][8][9][47][56] ainsi que l'article original de Carl Störmer [40].
Pour finir, la formule de Hutton:

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}$$

s'illustre très bien graphiquement sur du papier quadrillé:



L'angle β a pour tangente $1/2$ et l'angle α a pour tangente $1/3$. La somme $\alpha + \beta$ vaut $\pi/4$: l'angle dont la tangente vaut 1.

16)

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots$$

Cette formule est l'oeuvre de Leonhard Euler(1707-1783) et date de 1736. C'est un cas particulier de la fonction zéta de Riemann [10]:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

où s appartient au corps des complexes.
Sur sa lancée, il découvrit une formule générale [11] donnant les valeurs de ζ pour tous les entiers positifs pairs:

$$\zeta(2k) = 1 + \frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{3^{2k}} + \frac{1}{4^{2k}} + \ldots = (-1)^{k+1} \frac{2^{2k-1}}{(2k)!} B_{2k} \pi^{2k},$$

où les B_k sont les nombres de Bernoulli(Jacob Bernouilli(1654-1705)).
A titre indicatif, les premiers nombres sont:

$$B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6},\ B_4 = -\frac{1}{30},\ B_6 = \frac{1}{42},\ B_8 = -\frac{1}{30},\ B_{10} = \frac{5}{66}$$
$$B_{12} = -\frac{691}{2730},\ B_{14} = \frac{7}{6},\ B_{16} = -\frac{3617}{510},\ B_{18} = \frac{43867}{798},\ B_{20} = -\frac{174611}{330}$$
$$B_{22} = \frac{854513}{138},\ B_{24} = -\frac{236364091}{2730}, B_{26} = \frac{8553103}{6},\ B_{28} = -\frac{23749461029}{870}$$

et $B_3 = B_5 = B_7 = \ldots = 0$.
Pour en savoir plus sur l'obtention des nombres de Bernoulli, il faut consulter [12][62].
La manière dont Leonhard Euler parvint à ces formules est assez audacieuse. Si l'on considère un polynôme $P(x)$ qui s'écrit:

$$P(x) = 1 - a_1 x + a_2 x^2 - a_3 x^3 + a_4 x^4 - \ldots = (1-\alpha_1 x)(1-\alpha_2 x)(1-\alpha_3 x)(1-\alpha_4 x)\ldots$$

dont les racines sont $1/\alpha_1$, $1/\alpha_2$, $1/\alpha_3$, etc .... Alors, d'après les identités de Viète, nous avons $a_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \ldots$.
Ensuite prennons le développement en série de $\sin x/x$:

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots$$

dont les racines sont $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, $\pm 3\pi$, etc ....
D'où l'écriture suivante:

$$\begin{aligned} \frac{\sin x}{x} &= (1 - \frac{x}{\pi})(1 + \frac{x}{\pi})(1 - \frac{x}{2\pi})(1 + \frac{x}{2\pi})(1 - \frac{x}{3\pi})(1 + \frac{x}{3\pi})\ldots \\ &= (1 - \frac{x^2}{\pi^2})(1 - \frac{x^2}{4\pi^2})(1 - \frac{x^2}{9\pi^2})\ldots \end{aligned}$$

En reprennant le développement en série de $\sin x/x$, en faisant $X = x^2$ et en égalant avec le résultat qui précède, il vient:

$$1 - \frac{X^2}{3!} + \frac{X^4}{5!} - \frac{X^6}{7!} + \ldots = \Big(1 - \frac{X^2}{\pi^2}\Big)\Big(1 - \frac{X^2}{4\pi^2}\Big)\Big(1 - \frac{X^2}{9\pi^2}\Big)\ldots$$

Des identités de Viète nous en déduisons:

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \frac{1}{16\pi^2} + \ldots$$

D'où:

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Du point de vue de l'analyse cette démonstration manque de rigueur. Celle-ci sera apportée un peu plus tard grâce aux nombres complexes.
En 1748, Euler généralisa cette dernière formule. Ainsi dans son ouvrage *Introductio in Analysis Infinitorum* on trouve une étonnante formule:

$$\sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right) = x\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\ldots$$

Notons au passage que si l'on fait $x = \pi/2$ dans cette formule, on parvient à retrouver la formule de Wallis.
Donc Euler pose:

$$1 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + \ldots = (1 + \alpha_1 z)(1 + \alpha_2 z)(1 + \alpha_3 z)\ldots$$

Ici, z vaut x^2 dans la formule du développement de $\sin x$ en produit infini. Ensuite, il définit les sommes:

$$\begin{aligned}
S_1 &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \ldots \\
S_2 &= \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2 + \ldots \\
S_3 &= \alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3 + \alpha_4^3 + \ldots \\
\ldots &= \ldots
\end{aligned}$$

D'où:

$$\begin{aligned}
S_1 &= a_1 \\
S_2 &= a_1 S_1 - 2a_2 \\
S_3 &= a_1 S_2 - a_2 S_1 + 3a_3 \\
S_4 &= a_1 S_3 - a_2 S_2 + a_3 S_1 - 4a_4 \\
\ldots &= \ldots
\end{aligned}$$

De ces formules et du développement du sinus, il en déduit:

$$\zeta(2k) = 1 + \frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{3^{2k}} + \frac{1}{4^{2k}} + \ldots = (-1)^{k+1}\frac{2^{2k-1}}{(2k)!}B_{2k}\pi^{2k},$$

Dans ce même ouvrage, on trouve aussi un développement du cosinus en produit infini:

$$\cos x = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{4x^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right) = \left(1 - \frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{25\pi^2}\right)\ldots$$

Cela lui permet d'obtenir des formules du type:

$$\begin{aligned} \frac{\pi^2}{8} &= 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots \\ \frac{\pi^2}{96} &= 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \ldots \end{aligned}$$

La formule $\frac{\pi^2}{6} = \zeta(2)$ est aussi célèbre sous une autre forme. En effet, la probabilité que deux entiers pris au "hasard" soient premiers entre eux(i.e. pas de facteurs communs) est $6/\pi^2$. C'est E. Cesaro qui a montré ce résultat en 1881. Il peut-être utilisé pour calculer les décimales de π [36], mais ce n'est vraiment pas pratique.
Pour finir, un réarrangement loin d'être évident donne:

$$\frac{\pi^2}{6} = 3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\binom{2n}{n}}$$

Ainsi que:

$$\frac{\pi^4}{90} = \frac{36}{17}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4\binom{2n}{n}}$$

Cette dernière série a été découverte par Louis Comtet en 1974. Mais en 1979, Alfred J. Van der Poorten y apporta sa contribution [49] par le biais d'une remarquable intégrale:

$$\frac{17\pi^4}{6480} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4\binom{2n}{n}} = \int_0^{\pi/3} x\ln^2\left(2\sin\frac{x}{2}\right)dx$$

N'oublions pas non plus ce remarquable résultat d'Euler qui ne fait intervenir que des nombres permiers:

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{2^2}{2^2-1}\cdot\frac{3^2}{3^3-1}\cdot\frac{5^2}{5^2-1}\cdot\frac{7^2}{7^2-1}\cdot\frac{11^2}{11^2-1}\ldots$$

C'est le point de départ pour la décomposition de la fonction zéta en produit eulérien:

$$\zeta(s) = \frac{1}{(1-\frac{1}{2^s})(1-\frac{1}{3^s})(1-\frac{1}{5^s})(1-\frac{1}{7^s})(1-\frac{1}{11^s})\dots}$$

La fonction zéta de Riemann permet d'autres acrobaties. Ainsi en partant de la série de Gregory-Leibniz-De Lagny après un réarrangement astucieux [38], nous avons:

$$\pi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - 1}{4^n} \zeta(n+1)$$

Ou en partant de l'identité:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{2n^2}\right),$$

et en modifiant l'ordre de sommation, on parvient à:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)2^{2n+1}} \zeta(4n+2)$$

17)

$$\pi = 3\sqrt{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\binom{2n}{n}}$$

18)

$$\frac{2\pi\sqrt{3}+9}{27} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\binom{2n}{n}}$$

19)

$$\frac{\pi^2}{12} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$

C'est un cas particulier de la formule:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} = (1 - 2^{1-s})\zeta(s),$$

avec $s = 2$.

20)

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{11^2} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

C'est un cas particulier de la formule:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^s} = (1-2^{-s})\zeta(s),$$

avec $s = 2$.

21)

$$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{2a_n b_n}{a_n + b_n} \\ \\ b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} b_{n+1}} \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} a_o = 2\sqrt{3} \\ b_o = 3 \end{cases}$$

Cette algorithme est dû à Pfaff et date de 1800. Pfaff fût l'un des enseignants de Karl Friedrich Gauss(1777-1855). L'algorithme est en fait la formalisation d'une technique élaborée par Archimède de Syracuse pour évaluer π par encadrement. Il s'agissait de calculer les périmètres d'un $6 \cdot 2^n$-gone inscrit et circonscrit à un cercle de diamètre 1. Grâce à un polygone de 96 côtés il montra que:

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}$$

Plus tard au $V^{i\grave{e}me}$ siècle(vers 480) le chinois Tsu-Chung-Chih(430-501) encadrat π avec 3072 côtés:

$$3.1415926 < \pi < 3.1415927$$

Il en déduisit l'approximation bien connue 355/113.
En 1429, Al'Kashi qui vivait à Samarkand obtint 14 décimales avec un polygone à 2832 côtés. Puis le mathématicien Ludolph Van Ceulen(1540-1610) utilisa la même technique avec un polygone de 2^{62} côtés($2^{62} = 4.6116 \;\; 10^{18}$). Il calcula π avec 35 décimales(ces dernières furent gravées sur sa tombe). Cette technique fût légèrement amélioré par l'astronome-mathématicien hollandais Willebrod Snell Van Royen(1580 ou 1591-1626) qui réussit à accroître la précision de l'encadrement sans augmenter le nombre de côtés. Ainsi, les a_n et b_n de l'algorithme de Pfaff encadre π et convergent linéairement vers π. La solution d'Archimède de Syracuse correspond à $n = 4$.

Formellement, il faut évaluer les deux demi-périmètres a_n et b_n d'un polygone à $N = 3 \cdot 2^{n-1}$ côtés:

$$\begin{cases} a_n = N \tan(\pi/N) \\ b_n = N \sin(\pi/N) \end{cases}$$

a_n représente le demi-périmètre du polygone circonscrit et b_n celui qui est inscrit.
D'où:

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2N \tan(\pi/N) \\ b_{n+1} = 2N \sin(\pi/N) \end{cases}$$

De ces relations de récurrences il est aisé de déduire les moyennes harmoniques et géométriques:

$$\begin{cases} \dfrac{2}{a_{n+1}} = \dfrac{1}{a_n} + \dfrac{1}{b_n} \\ \\ b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} b_n} \end{cases}$$

22)

$$\begin{cases} \pi_n = \dfrac{4a_{n+1}^2}{1 - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^{k+1} c_k^2} \\ \\ a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-1}) \\ b_n = \sqrt{a_{n-1} b_{n-1}} \\ c_n = a_{n-1} - a_n \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} a_o = 1 \\ b_o = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ n \geq 1 \end{cases}$$

C'est l'algorithme de Brent-Salamin qui date de 1976. Richard Brent et Eugène Salamin ont trouvé cet algorithme de manière indépendante [13][14][51]. Celui-ci fait notamment appel à la moyenne arithmético-géométrique [15][16][17] et aux intégrales elliptiques [18]. En fait on devrait plutôt parler d'algorithme de Gauss-Brent-Salamin. En effet, en 1799, Karl Friedrich Gauss avait remarqué par le calcul que si l'on a:

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) \\ \\ b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} a_o = 1 \\ b_o = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

alors:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = \frac{\pi}{2\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}}$$

Pour finir, ajoutons que cet algorithme converge de manière quadratique (2 décimales exactes à chaque itération).

23)

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{2}(\sqrt{x_n} + \dfrac{1}{\sqrt{x_n}}) \quad (n \geq 0) \\ \\ y_{n+1} = \dfrac{y_n\sqrt{x_n} + \frac{1}{\sqrt{x_n}}}{y_n + 1} \quad (n \geq 1) \\ \\ \pi_n = \pi_{n-1}\dfrac{x_{n+1}}{y_{n+1}} \quad (n \geq 1) \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} x_o = \sqrt{2} \\ y_1 = \sqrt[4]{2} \\ \pi_o = 2 + \sqrt{2} \end{cases}$$

Cet algorithme est dû aux frères Borwein(Jonathan M. et Peter B.) de l'Université Simon Fraser à Burnaby(Canada). Cela date de 1984 [16][17]. Il converge quadratiquement. L'algorithme précédent est en fait un cas particulier et une approximation de celui-ci. Dans ce cas précis, π_n décroit vers π et nous avons la relation:

$$\pi_n - \pi < 10^{-2^{n+1}} \quad (n \geq 2)$$

Une implémentation en C et en FORTRAN se trouve dans [19]. Un autre algorithme à convergence quadratique et des mêmes auteurs est:

$$\begin{cases} x_n = x_{n-1}(1+y_n)^2 - 2^n y_n \\ \\ y_n = \dfrac{1 - \sqrt{1 - y_{n-1}^2}}{1 + \sqrt{1 - y_{n-1}^2}} \end{cases}$$

avec $x_o = 1/2$ et $y_o = 1/\sqrt{2}$. Dans ce cas, x_n converge vers $1/\pi$.
Une implémentation en C++ se trouve sur `SimTel` ou l'un de ses miroirs. Par exemple `ftp://ftp.ibp.fr/pub/simtelnet/win3/math/piw131.zip`.

En 1985, les frères Borwein ont trouvé une formule qui converge vers $1/\pi$ de manière cubique [21]:

$$\begin{cases} r_{n+1} = \dfrac{3}{1+2(1-s_n^3)^{1/3}} \\ \\ s_{n+1} = \dfrac{r_{n+1}-1}{2} \\ \\ a_{n+1} = r_{n+1}^2 a_n - 3^n(r_{n+1}^2 - 1) \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} a_o = 1/3 \\ s_o = \frac{1}{2}(\sqrt{3}-1) \end{cases}$$

Ainsi a_n tend vers $1/\pi$.
Ensuite ils parvinrent à un algorithme à convergence quartique (4 décimales exactes par itération)[17][24]:

$$\begin{cases} y_{n+1} = \dfrac{1-(1-y_n^4)^{1/4}}{1+(1-y_n^4)^{1/4}} \\ \\ a_{n+1} = (1+y_{n+1})^4 a_n - 2^{2n+3} y_{n+1}(1+y_{n+1}+y_{n+1}^2) \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} y_o = \sqrt{2}-1 \\ a_o = 6-4\sqrt{2} \end{cases}$$

Celui-ci fût notamment utilisé par David H. Bailey en Janvier 1986 pour calculer 29 360 111 décimales de π sur un Cray-2 du NASA Ames Research Center [24]. En Janvier 1987, le japonais Yasumasa Kanada de l'Université de Tokyo calcula 2^{27}(134 217 728) décimales de π en utilisant un NEC SX2. Le calcul dura environ un jour et demi. En Janvier 1988, il récidiva avec 201 326 551 décimales [25][58] sur un Hitachi S-820 où cela ne prit que 6 heures. Selon toute vraissemblance, Y. Kanada détient toujours le record du nombre de décimales(51 539 600 000) établit avec son collègue Daisuke Takahashi entre le 6 et le 8 Juin 1997 et entre le 4 et le 6 Juillet 1997 pour être précis.
A propos de cet algorithme, notons que nous avons la relation:

$$0 < a_n - \frac{1}{\pi} < 16 \cdot 4^n e^{-2 \cdot 4^n \pi}$$

Une implémentation en C++ se trouve aussi dans le même fichier cité plus haut(`piw131.zip`).
Les travaux des frères Borwein prennent leur source dans ceux de S. Ramanujan relatifs aux identités modulaires [1][5]. Il en résulte l'établissement d'un algorithme qui converge de manière quintique vers $1/\pi$:

$$
\begin{cases}
s_{n+1} = \dfrac{25}{s_n(z + x/z + 1)^2} \\[2ex]
x = \dfrac{5}{s_n} - 1 \\[2ex]
y = (x-1)^2 + 7 \\[2ex]
z = [\frac{1}{2}x(y + \sqrt{y^2 - 4x^3})]^{1/5} \\[2ex]
a_{n+1} = s_n^2 a_n - 5^n \left[\dfrac{s_n^2 - 5}{2} + \sqrt{s_n(s_n^2 - 2s_n + 5)} \right]
\end{cases}
$$

avec

$$
\begin{cases}
s_o = 5(\sqrt{5} - 2) \\
a_o = 1/2
\end{cases}
$$

et la relation:

$$0 < a_n - \frac{1}{\pi} < 16 \cdot 5^n e^{-5^n \pi}$$

Pour en finir, il y en a un autre qui converge de manière 'nonique' (9 décimales exactes par itération):

$$
\begin{cases}
t = 1 + 2r_n \\[2ex]
u = [9r_n(1 + r_n + r_n^2)]^{1/3} \\[2ex]
v = t^2 + tu + u^2 \\[2ex]
m = \dfrac{27(1 + s_n + s_n^2)}{v} \\[2ex]
s_{n+1} = \dfrac{(1 - r_n)^3}{v(t + 2u)} \\[2ex]
r_{n+1} = (1 - s_n^3)^{1/3} \\[2ex]
a_{n+1} = ma_n + 3^{2n-1}(1 - m)
\end{cases}
$$

avec

$$\begin{cases} r_o = \frac{1}{2}(\sqrt{3}-1) \\ s_o = (1-r_o^3)^{1/3} \\ a_o = 1/3 \end{cases}$$

24)

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n)!(1103+26390n)}{(n)!^4(396)^{4n}}$$

Cette étonnante série est l'oeuvre de Srinivasa Ramanujan(1887-1920) et date de 1914 [1]. Cependant, elle ne fût exploitée qu'en 1985 par William Gosper de la société Symbolics Inc. . Il calcula par ordinateur 17 526 200 décimales. Chaque terme de la série ajoute 8 décimales exactes de π. On peut s'étonner qu'il s'est écoulé autant de temps entre l'établissement de formule et son utilisation. Néanmoins, il faut savoir que les travaux de Ramanujan ont été plus largement publié que très récemment. C'est notamment le cas de ses fameux "Carnets" [20] grâce à G. Watson, B. Wilson et Bruce Berndt(NdR: ces carnets sont une vraie mine d'or!).
Il existe une autre écriture de cette série:

$$\frac{1}{\pi} = 2\sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\frac{1}{4})_n(\frac{1}{2})_n(\frac{3}{4})_n}{(1)_n(1)_n n!}(1103+26390n)\left(\frac{1}{99}\right)^{4n+2},$$

avec $(a)_n = a(a+1)\cdots(a+n-1)$ et $a_o = 1$.
Derrière ce type de série, se cache en fait des notions importantes du domaine des mathématiques telles que les fonctions modulaires, les fonctions elliptiques et les champs quadratiques et imaginaires.
Ramanujan, malgré sa courte vie, fût un mathématicien prolifique et prodigieux. Il était entre autre fasciné par π. Le nombre de formules qu'il trouva pour calculer cette constante est énorme. En voici un florilège qui n'est évidemment pas exhaustif:
Commençons par des approximations:

–
$$\pi \approx \frac{19\sqrt{7}}{16} = 3.14182\ldots$$

–
$$\pi \approx \frac{7}{3}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{5}\right) = 3.14162\ldots$$

–
$$\pi \approx \frac{9}{5}+\sqrt{\frac{9}{5}} = 3.14164\ldots$$

–

$$\pi \approx \frac{12}{\sqrt{130}} \ln\left[\frac{(3+\sqrt{13})(\sqrt{8}+\sqrt{10})}{2}\right] = 3.141593\ldots$$

–

$$\pi \approx (1.09999901)\cdot(1.19999911)\cdot(1.39999931)\cdot(1.69999961) = 3.14159257\ldots$$

–

$$\pi \approx \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{99^2}{1103} = 3.141592731\ldots$$

–

$$\pi \approx 2+\sqrt{1+\left(\frac{413}{750}\right)^2} = 3.141592649\ldots$$

–

$$\pi \approx \left(97+\frac{9}{22}\right)^{1/4} = 3.1415926526\ldots$$

–

$$\pi \approx \left(9^2+\frac{19^2}{22}\right)^{1/4} = \left(102-\frac{2222}{22^2}\right) = 3.1415926526\ldots$$

–

$$\pi \approx \frac{63}{25}\left(\frac{17+15\sqrt{5}}{7+15\sqrt{5}}\right) = 3.141592655\ldots$$

–

$$\pi \approx \frac{355}{113}(1-\frac{0.0003}{3533}) = 3.1415926535897943\ldots$$

–

$$\pi \approx \frac{24}{\sqrt{142}} \ln\left[\frac{\sqrt{10+11\sqrt{2}}+\sqrt{10+7\sqrt{2}}}{2}\right] = 3.14159265358979313\ldots$$

–

$$\pi \approx \frac{12}{\sqrt{190}} \ln\left[(3+\sqrt{10})(\sqrt{8}+\sqrt{10})\right] = 3.14159265358979323819\ldots$$

–

$$\pi \approx \frac{12}{\sqrt{190}} \ln\left[\frac{1}{4}(3+\sqrt{5})(2+\sqrt{2})(5+2\sqrt{10}+\sqrt{61+20\sqrt{10}})\right]$$
$$= 3.14159265358979323846264 20\ldots$$

–

$$\pi \approx \frac{4}{\sqrt{522}} \ln \left[\left(\frac{5+\sqrt{29}}{\sqrt{2}} \right)^3 \left(5\sqrt{29}+11\sqrt{6}\right) \left(\frac{\sqrt{9+3\sqrt{6}}}{2} + \frac{\sqrt{5+3\sqrt{6}}}{2} \right)^6 \right]$$
$$= 3.14159265358979323846264338327943\ldots$$

Et pour ce qui est des séries:

–

$$\frac{1}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n}^3 \frac{42n+5}{2^{12n+4}}$$

–

$$\frac{2^{3/2}}{\sqrt{\pi}[, (3/4)]^2} = 1 + 9\left(\frac{1}{4}\right)^4 + 17\left(\frac{1\cdot 5}{4\cdot 8}\right)^4 + 25\left(\frac{1\cdot 5\cdot 9}{4\cdot 8\cdot 12}\right)^4 + \ldots,$$

où , (x) est la fonction Gamma d'Euler [43] sachant que , $(3/4) = 0.919062527\ldots$.

–

$$\frac{4}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(6n+1)(\frac{1}{2})_n^3}{4^n (n!)^3}$$

–

$$\frac{16}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(42n+5)(\frac{1}{2})_n^3}{64^n (n!)^3}$$

–

$$\frac{2\sqrt{3}}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+8n)(\frac{1}{2})_n(\frac{1}{4})_n(\frac{3}{4})_n}{9^n (n!)^3}$$

–

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+10n)(\frac{1}{2})_n(\frac{1}{4})_n(\frac{3}{4})_n}{9^{2n+1} (n!)^3}$$

–

$$\frac{1}{3\pi\sqrt{3}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3+40n)(\frac{1}{2})_n(\frac{1}{4})_n(\frac{3}{4})_n}{49^{2n+1} (n!)^3}$$

–

$$\frac{2}{\pi\sqrt{11}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(19+280n)(\frac{1}{2})_n(\frac{1}{4})_n(\frac{3}{4})_n}{99^{2n+1} (n!)^3}$$

–

$$\frac{4}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(3+20n)(\frac{1}{2})_n(\frac{1}{4})_n(\frac{3}{4})_n}{2^{2n+1}(n!)^3}$$

–

$$\frac{4}{\pi\sqrt{3}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(3+28n)(\frac{1}{2})_n(\frac{1}{4})_n(\frac{3}{4})_n}{3^n 4^{n+1}(n!)^3}$$

–

$$\frac{4}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(23+260n)(\frac{1}{2})_n(\frac{1}{4})_n(\frac{3}{4})_n}{18^{2n+1}(n!)^3}$$

–

$$\frac{4}{\pi\sqrt{5}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(41+644n)(\frac{1}{2})_n(\frac{1}{4})_n(\frac{3}{4})_n}{5^n 72^{n+1}(n!)^3}$$

–

$$\frac{4}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(1123+21460n)(\frac{1}{2})_n(\frac{1}{4})_n(\frac{3}{4})_n}{882^{2n+1}(n!)^3}$$

–

$$\frac{27}{4\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2+15n)(\frac{1}{2})_n(\frac{1}{3})_n(\frac{2}{3})_n}{(n!)^3}\left(\frac{2}{27}\right)^n$$

–

$$\frac{15\sqrt{3}}{2\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4+33n)(\frac{1}{2})_n(\frac{1}{3})_n(\frac{2}{3})_n}{(n!)^3}\left(\frac{4}{125}\right)^n$$

–

$$\frac{5\sqrt{5}}{2\pi\sqrt{3}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+11n)(\frac{1}{2})_n(\frac{1}{6})_n(\frac{5}{6})_n}{(n!)^3}\left(\frac{4}{125}\right)^n$$

–

$$\frac{85\sqrt{85}}{18\pi\sqrt{3}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(8+133n)(\frac{1}{2})_n(\frac{1}{6})_n(\frac{5}{6})_n}{(n!)^3}\left(\frac{4}{85}\right)^n$$

–

$$\frac{32}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{5}(5+42n) - 1 + 30n)(\frac{1}{2})_n^3}{64^n(n!)^3}\phi^{-8n}$$

où ϕ est le Nombre d'Or valant $(1+\sqrt{5})/2$.

Plus en savoir plus sur Ramanujan, le mieux est de consulter sa biographie [42], ainsi que l'autobiographie du mathématicien G.H. Hardy [61].

25)

$$\frac{1}{\pi} = 12 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(6n)!}{(3n)!(n!)^3} \frac{13591409 + 545140134n}{(640320^3)^{n+1/2}}$$

Cette formule est due aux frères Chudnowsky(David et Gregory) et date de 1989 [27]. Chaque terme de la série ajoute 14 décimales exactes. Elle s'inspire des formules trouvées par S. Ramanujan. En Mai 1994, cette série permit de calculer 4 044 000 000 décimales de π sur un super-ordinateur de leur fabrication. Tout le côté anecdotique de cette histoire nous est raconté dans un article du *New Yorker* [44]. Une autre formule de leur cru sert à calculer la constante π dans le logiciel de calcul formel *Mathematica* [45].

26)

$$\frac{1}{\pi} = 12 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(6n)!(A + Bn)}{C^{n+1/2}(3n)!(n!)^3},$$

avec:

$$\begin{aligned} A &= 212175710912\sqrt{61} \\ B &= 13773980892672\sqrt{61} + 107578229802750 \\ C &= [5280(236674 + 30303\sqrt{61})]^3 \end{aligned}$$

Cette énorme série est le fait des frères Borwein [46] et date de 1989. Chaque terme de la série ajoute 25 décimales exactes. Nul besoin de vous précisez qu'à ce stade, il est impensable de faire usage de la multiplication classique. Compte tenu des très grands nombres mis en calcul, on fait plutôt appel à des Transformées de Fourier Rapides(FFT) [24][27] ou à l'arithmétique modulaire. Ceci vaut pour presque toutes les formules utilisées après les années 70.
Dans le même esprit, il y a des séries avec des coefficients encore plus importants:

$$\frac{1}{\pi} = \frac{1}{\sqrt{-12C}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{6})_n (\frac{3}{6})_n (\frac{5}{6})_n}{(n!)^3} \frac{A + Bn}{C^n},$$

avec:

$$
\begin{aligned}
A = {} & 5280419026080999965452185 + 2361475178400070170568880\sqrt{5} \\
& +32\sqrt{5}(10891728551171178200467436212395209160385656017 \\
& +4870929086578810225077338534541688721351255040\sqrt{5})^{1/2} \\
B = {} & 65415920445805226752414575 0 + 2925488898550776690804672 00\sqrt{5} \\
& +209664\sqrt{3110}(6260208323789001163699332265444020882161 \\
& +2799650273060444296577206890718825190235\sqrt{5})^{1/2} \\
C = {} & -[17897749588626020 + 8004116944887336\sqrt{5} \\
& +108\sqrt{5}(1098523457946355032371331847 3 \\
& +491274625369236275460739591 2\sqrt{5})^{1/2}]^3
\end{aligned}
$$

Chaque terme de cette série ajoute 50 décimales exactes.

$$\frac{1}{\pi} = \frac{1}{\sqrt{3C}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{6})_n(\frac{3}{6})_n(\frac{5}{6})_n}{(n!)^3} \frac{A+Bn}{C^n},$$

avec:

$$
\begin{aligned}
A = {} & 212426685165 04965 + 150208349585 18500\sqrt{2} \\
& +2\sqrt{5}(45125096427586568251645610141659 \\
& +31908261685643312902173585434250\sqrt{2})^{1/2} \\
B = {} & 1839779353703421900 + 1300920456890691000\sqrt{2} \\
& +24337404\sqrt{10}(1142912476713024496667 + 808161162586491705750\sqrt{2})^{1/2} \\
C = {} & [71864175655 + 22725423252\sqrt{10} + 2808\sqrt{5}(261993316778681 \\
& +82849561276216\sqrt{10})^{1/2}]^3
\end{aligned}
$$

Chaque terme de cette série ajoute 34 décimales exactes.

$$\frac{1}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{4})_n(\frac{2}{4})_n(\frac{3}{4})_n}{(n!)^3} \frac{A+Bn}{C^{2n+1}},$$

avec:

$$
\begin{aligned}
A = {} & [4521962731044058367634998271455136035/4 \\
& +799377627848523458605912125112563234\sqrt{2} \\
& +12(177501275529092352030123773691820793452753907811908738706564912610572 19 \\
& +1255123555958829884236839904476079251826408616374387198187634303258534\sqrt{2})^{1/2}]^{1/2} \\
B = {} & [96177613950889534859154440913076361060 00 \\
& +6800784302301588686616253973429782154400\sqrt{2} \\
& +52003425600\sqrt{2}(3420456658672290315173107253751646913664067204719883059296 3 \\
& +2418628098101856660655230981125577585184945651021683039952 2\sqrt{2})^{1/2}]^{1/2} \\
C = {} & 1670141896514232075 + 1180968660568974600\sqrt{2} \\
& +2736\sqrt{2}(3726272018650177463417915646 03 + 2634872212933225771559515148 50\sqrt{2})^{1/2}
\end{aligned}
$$

Chaque terme de cette série ajoute 37 décimales exactes.

27)

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1\cdot 2}{3\cdot 5} + \frac{1\cdot 2\cdot 3}{3\cdot 5\cdot 7} + \ldots = 12\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(2n+1)!!},$$

avec $n!! = 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\ldots$.
Cette série est intéressante car elle inaugure une nouvelle ère dans le calcul de π. Elle peut se réécrire d'une autre façon(à la Hörner!):

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{3}(1 + \frac{2}{5}(1 + \frac{3}{7}(1 + \frac{4}{9}(1 + \ldots))))$$

Il en est fait usage dans les algorithmes comptes-gouttes(spigot algorithms) [30]. Ces derniers n'utilisent que des entiers pour le calcul [28][29]. Chaque décimales de π calculée est exacte. Cette technique est implémentable sur n'importe quel ordinateur dans la mesure où il n'est pas utile de faire des calculs en multiprécision. Cette découverte pour π, qui date de 1990, est due à Stanley Rabinowitz et Stan Wagon. Un code en PASCAL se trouve dans [30].

28)

$$\begin{aligned}\pi = 3 + \frac{1}{60}8 + \frac{1}{60}\cdot\frac{2\cdot 3}{7\cdot 8\cdot 3}13 + \frac{1}{60}\cdot\frac{2\cdot 3}{7\cdot 8\cdot 3}\cdot\frac{3\cdot 5}{10\cdot 11\cdot 3}18 \\ + \frac{1}{60}\cdot\frac{2\cdot 3}{7\cdot 8\cdot 3}\cdot\frac{3\cdot 5}{10\cdot 11\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 7}{13\cdot 14\cdot 3}23 + \ldots\end{aligned}$$

Cette formule fût découverte par William Gosper en 1974 [31][50] en utilisant de manière subtile la transformation d'Euler sur la formule de Gregory-Leibniz(cf. 12). Ainsi nous avons:

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2} &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2 2^{n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{(2n+1)!!} \\ &= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1\cdot 2}{3\cdot 5} + \frac{1\cdot 2\cdot 3}{3\cdot 5\cdot 7} + \ldots \\ &= 1 + \frac{1}{3}(1 + \frac{2}{5}(1 + \frac{3}{7}(1 + \frac{4}{9}(1 + \cdots))))\end{aligned}$$

Ce qui peut alors se réécrire à la Hörner:

$$\pi = 3 + \frac{1}{60}(8 + \frac{2\cdot 3}{7\cdot 8\cdot 3}(13 + \frac{3\cdot 5}{10\cdot 11\cdot 3}(18 + \frac{4\cdot 2}{13\cdot 14\cdot 3}(23 + \cdots))))$$

Dans le même esprit, il y a la série:

$$\frac{\pi}{2\sqrt{3}} = 1 - \frac{1}{3\cdot 3} + \frac{1}{5\cdot 3^2} - \frac{1}{7\cdot 3^3} + \frac{1}{9\cdot 3^4} - \frac{1}{11\cdot 3^5} + \ldots,$$

qui devient:

$$\frac{\pi}{2\sqrt{3}} = 1 - \frac{1}{3}(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}(\frac{1}{5} + \frac{1}{3}(\frac{1}{7} - \frac{1}{3}(\frac{1}{9} + \frac{1}{3}(\frac{1}{11} - \ldots)))))$$

Il y a aussi la série de Ryōhitsu Matsunaga qui date de 1739:

$$\frac{\pi}{3} = 1 + \frac{1^2}{4 \cdot 6} + \frac{1^2 \cdot 3^2}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14} + \ldots,$$

qui devient:

$$\frac{\pi}{3} = 1 + \frac{1}{4 \cdot 6}(1^2 + \frac{1}{8 \cdot 10}(1^2 \cdot 3^2 + \frac{1}{12 \cdot 14}(1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 + \frac{1}{16 \cdot 18}(\cdots))))$$

avec laquelle il calcula 50 décimales de π.

29)

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n}(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6})$$

Cette formule résulte du travail conjoint de David Bailey, Peter Borwein et Simon Plouffe(BBP). Sa découverte remonte exactement au 19 Septembre 1995 à 0H29 [33]. Dans la voie ouverte par les algorithmes comptes-gouttes, cette formule permet de calculer n'importe quelle décimale de π en base 16 sans avoir besoin de calculer les décimales précédentes. Ce qui est étonnant, c'est que cette formule aurait pu être découverte bien plus tôt(à l'époque d'Euler!) dans la mesure où elle ne comporte pas d'écueils mathématiques insurmontables. Pour preuve:
Pour tout $k < 8$ nous avons:

$$\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{x^{k-1}}{1-x^k}dx = \int_0^{1/\sqrt{2}} dx \sum_{n=0}^{\infty} x^{k-1+8n} = \frac{1}{\sqrt{2}^k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n(8n+k)}$$

Ce qui permet d'écrire:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n}\left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6}\right)$$
$$= \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{4\sqrt{2} - 8x^3 - 4\sqrt{2}x^4 - 8x^5}{1-x^8}dx$$

En faisant le changement de variable $y = \sqrt{2}x$, il vient:

$$\int_0^1 \frac{16y - 16}{y^4 - 2y^3 + 4y - 4}dy = \int_0^1 \frac{4y}{y^2-2}dy - \int_0^1 \frac{4y-8}{y^2-2y+2}dy$$

Il suffit ensuite d'établir que le second membre de l'égalité vaut π en faisant au préalable une décomposition en fractions rationnelles des intégrands.

Ainsi grâce à la formule BBP, Simon Plouffe annonça sur le newsgroup `sci.math`(le 5 Octobre 1995 à 23 h 05 min 57 s GMT pour être précis!) que le 10 milliardième chiffre hexadécimal des décimales de π est: `921C73C6838FB2`. Ce qui veut dire que le 40 milliardième chiffre binaire des décimales de π est `1`.
Les auteurs de la formule BBP ont aussi découvert d'autres formules de ce type [34], parmi lesquelles:

$$\begin{aligned}\pi^2 &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{16^n}\Big(\frac{16}{(8n+1)^2}-\frac{16}{(8n+2)^2}-\frac{8}{(8n+3)^2}-\frac{16}{(8n+4)^2}-\frac{4}{(8n+5)^2}\\ &- \frac{4}{(8n+6)^2}+\frac{2}{(8n+7)^2}\Big)\end{aligned}$$

et:

$$\pi^2 = \frac{9}{8}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{64^n}\Big(\frac{16}{(6n+1)^2}-\frac{24}{(6n+2)^2}-\frac{8}{(6n+3)^2}-\frac{6}{(6n+4)^2}+\frac{1}{(6n+5)^2}\Big)$$

30)

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{16^n}\Big(\frac{4+8r}{8n+1}-\frac{8r}{8n+2}-\frac{4r}{8n+3}-\frac{2+8r}{8n+4}-\frac{1+2r}{8n+5}-\frac{1+2r}{8n+6}+\frac{r}{8n+7}\Big)$$

où r est réel ou complexe.
Cette formule est due à Victor Adamchik de *Wolfram Research Inc.* et Stan Wagon [34]. Elle date de Janvier 1996. En prenant $r=0$, on retrouve la formule BBP. Adamchik et Wagon ont aussi établit d'autres formules. Par exemple:

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{16^n}\Big(\frac{2}{8n+1}+\frac{2}{4n+2}+\frac{1}{4n+3}-\frac{1/2}{4n+5}-\frac{1/2}{4n+6}-\frac{1/4}{4n+7}\Big)$$

qui s'écrit en plus compacte:

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^n}\Big(\frac{2}{4n+1}+\frac{2}{4n+2}+\frac{1}{4n+3}\Big)$$

Il y a aussi:

$$\pi^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\Big(\frac{-12}{n+1}+\frac{384}{n+2}+\frac{45/2}{2n+1}-\frac{1215/2}{2n+3}\Big)$$

et:

$$\pi = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\Big(\frac{-238}{n+1}+\frac{285/2}{2n+1}-\frac{667/32}{4n+1}-\frac{5103/16}{4n+3}+\frac{35625/32}{4n+5}\Big)$$

A propos de ce type de formules, que l'on peut appeler type BBP, une interogation demeure. En effet, existe-t-il une formule qui donnerait les décimales de π en base 10 ? D'une manière plus formelle, existe-t-il deux polynômes P et Q à coefficients entiers tels que:

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} \left(\frac{1}{10}\right)^n$$

31)

$$\begin{aligned}\pi &= \frac{1}{2^6} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{10n}} \left(- \frac{2^5}{4n+1} - \frac{1}{4n+3} + \frac{2^8}{10n+1} - \frac{2^6}{10n+3} - \frac{2^2}{10n+5} \right. \\ &- \left. \frac{2^2}{10n+7} + \frac{1}{10n+9} \right)\end{aligned}$$

Cette formule fût trouvée par Fabrice Bellard de l'IRISA(Rennes) le 20 Janvier 1997. Elle est 43% plus rapide que la formule BBP. Fabrice Bellard s'était déjà illustré, le 7 Octobre 1996, en calculant la 100 milliardième décimale de π en base 16: `9C381872D27596F81D0E48B95A6C46` ; ce qui fait que le 400 milliardième chiffre binaire de π vaut `1`. Cette nouvelle a fait l'objet d'un article dans le Figaro.
On lui doit aussi cette formule:

$$\pi = \frac{1}{740025} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3P(n)}{2^{n-1} \binom{7n}{2n}} - 20379280 \right)$$

avec:

$$\begin{aligned}P(n) &= -885673181n^5 + 3125347237n^4 - 2942969225n^3 + 1031962795n^2 \\ &- 196882274n + 10996648\end{aligned}$$

32) Formules Linguistiques:
Ce sont les moyens mnémotechniques qui permettent de retenir quelques décimales dans divers langues en comptant le nombre de lettre de chaque mots.

En Français:

- Que j'aime à faire apprendre un nombre utile aux sages.
  Immortel Archimède, artiste, ingénieur,
  Qui de ton jugement peut priser la valeur ?
  Pour moi, ton problème eut de pareils avantages.

- En voici une autre version composée par François Sholder de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne.

  `Que j'aime à faire apprendre un nombre utile aux sages.`
  `Glorieux Archimède, artiste, ingénieux !`
  `Toi de qui Syracuse aime encore la gloire.`
  `Soit ton nom conservé par de savants grimoires.`

En Anglais:

- `May I have a large container of coffee?`
  cf. [59].
- En voici un attribué à Sir James Jeans(1877-1946) [59][60].

  `How I want a drink, alcoholic of course, after the heavy lectures involving quantum mechanics.`
- `How I wish I could enumerate Pi easily, since all these horrible mnemonics prevent recalling any of pi's sequence more simply.`
- `See, I have a rhyme assisting my feeble brain, its tasks sometimes resisting.`

En Espagnol:

- `Sol y Luna y cielo proclaman al divino autor del cosmo.`

En Portuguais:

- `Sim, é'util e fácil memorizar um n'ugrato aos sábios.`
- `Sou o medo e temor constante do menino vadio.`

En Danois:

- `Eva, o lief, o zoete hartedief uw blauwe oogen zyn wreed bedrogen.`

En Albanais:

- `Kur e shoh e mesoj sigurisht.`

Voilà c'est tout pour cette fois.

---

1 Bibliographie.

- [1] S. Ramanujan, *Modular equations and approximation to* π, Quat. Journ. Math.(Oxford) 45, 1914, pp350-372.
- [2] S. Ramanujan, *Notebooks*(2 volumes), Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1957.
- [3] F. Scheid, *Analyse Numérique*, Série Schaum, Edition Mac Graw-Hill, 1987, p75, p79 et p162.
- [4] *Arctangent formulas for* π, Center for advanced Computing Research, California Institute of Technology(Caltech).
- [5] J.M. Borwein, P.B. Borwein, *Pi and the AGM: A study in analytic number theory and computational complexity*, New-York, Edition Wiley and Sons,1987.
- [6] H. Dörrie, *100 Great Problems of Elementary Mathematics: Their History and Solution*, Edition Dover, 1965.
- [7] J. Todd, *A Problem on Arctangent Relations*, American Mathematical Monthly, 56(1949), pp517-528.
- [8] J.P. Friedelmeyer, *Arcs de cercle à tangente rationnelle et entiers imaginaires premiers*, Bulletin de l'APMEP, 358(1987), pp145-159.
- [9] D. Shanks, J.W. Wrench, *Calculation of* π *to 100000 decimals*, Math. Comput., 16(1962), pp76-79.
- [10] H. Edwards, *Riemann's Zeta Function*, Edition Academic Press, 1974.
- [11] R. Ayoub, *Euler and zeta function*, American Mathematical Monthly, 81(1974), pp1067-1086.
- [12] E. Hairer, G. Wanner, *Analysis by Its History*, Coll. Undergraduate Texts in Mathematics, Edition Springer-Verlag, 1995, pp160-164.
- [13] R.P. Brent, *Fast multiple-precision evaluation of elementary functions*, J. ACM, 23(1976), pp242-251.
- [14] E. Salamin, *Computation of* π *using arithmetic-geometric mean*, Math. Comput., 30(1976), pp565-570.

- [15] G. Almkvist, B. Berndt, *Gauss, Landen, Ramanujan, The arithmetic-geometric mean, ellipses, π, and the Ladies Diary*, American Mathematical Monthly, 95(1988), pp585-608.

- [16] J. M. Borwein, P.B. Borwein, *The arithmetic-geometric mean and fast computation of elementary functions*, SIAM Rev., 26(1984), pp351-365.

- [17] J. M. Borwein, P.B. Borwein, *Pi and the AGM: A study in analytic number theory and computational complexity*, Edition Wiley & Sons, New-York, 1987.

- [18] V. Smirnov, *Cours de Mathématiques Supérieures*, Tome 3, 2^{nde} partie, , pp598-663.

- [19] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, B.P. Flannery, *Numerical Recipes in C(in Fortran)* 2^{nd} Edition, Edition Cambridge University Press, 1992, section 20.6.

- [20] B.C. Berndt, *Ramanujan's Notebooks*, Edition Springer-Verlag, New-York.

- [21] J. M. Borwein, P.B. Borwein, *An explicit cubic iteration for π*, BIT, 26(1986), pp123-126.

- [22] J. M. Borwein, P.B. Borwein, *More quadratically converging algorithms for π*, Mathematics of Computation, Vol. 46, 1986, pp247-253.

- [23] J. M. Borwein, P.B. Borwein, D.H. Bailey, *Ramanujan, modular equations and pi or how to compute a billion digits of pi*, American Mathematical Monthly, 96(1989), pp201-219.

- [24] D.H. Bailey, *The computation of π to 29 360 000 decimal digits using Borwein's quartically convergent algorithm*, Mathematics of Computation, Vol. 50, n^o181, January 1988, pp283-296.

- [25] Y. Kanada, *Vectorization of multiple-precision arithmetic program and 201 326 000 decimal digits of π calculation*, Supercomputing 88, Vol. 2, Science and Application, IEEE.

- [26] D. Chudnovsky, G. Chudnovsky, *The computation of classical constants*, Proc. National Academy of Science USA, Vol. 86, 1989.

- [27] E.O. Brigham, *The Fast Fourier Transform*, Edition Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New-Jersey, 1974.

- [28] Ian Stewart, *Les algorithmes compte-gouttes*, Pour La Science, n^o215, Septembre 1995, pp104-107.

- [29] A.H.J. Sale, *The calculation of e to many significant digits*, Computing Journal, Vol. 11, 1968, pp229-230.

- [30] S. Rabinowitz, S. Wagon, *A spigot algorithm for the digits of* π, American Mathematical Monthly, 102(1995), pp195-203.

- [31] R.W. Gosper, *Acceleration of series*, Memo n^o304, MIT Artificial Intelligence Lab., Cambridge Massachussets, 1974.

- [32] J-P. Delahaye, *Obsession de* π, Pour La Science, n^o231, Janvier 1997, pp104-108.

- [33] D.H. Bailey, P.B. Borwein, S. Plouffe, *On the rapid computation of various polylogarithmic constants*, Math. Comput., Vol. 66, 1997, pp903-913.

- [34] V. Adamchik, S. Wagon, *Pi: A 2000-year search changes direction*, preprint.

- [35] P. Beckmann, *A History of Pi*, 3^{rd} Edition, Edition Dorset Press New-York, 1989, pp92-95.

- [36] R. A.J. Matthews, Nature, vol. 374, April 20, 1995, p681.

- [37] J. L. Coolidge, *The Mathematics of Great Amateurs*, Edition Oxford Clarendon, 1949.

- [38] I. Vardi, *Computational Recreations in Mathematica*, Reading, Edition Addison Wesley, 1991, p156-158.

- [39] K. Knopp, *Theory and Application of Infinite Series*, 2^{nd} English Edition, 1948, p238.

- [40] C. Störmer, *Sur l'Application de la Théorie des Nombres Entiers Complexes à la Solution en Nombres Rationnels* $x_1, x_2, \ldots, c_1, c_2, \ldots, k$ *de l'Equation* $c_1 \arctan x_1 + c_2 \arctan x_2 + \ldots + c_n \arctan x_n = k\pi/4$, Archiv für Mathematik og Naturvidenskab, B XIX, n^o3 ,1896, pp1-96.

- [41] R. Séroul, *Math-Info, informatique pour les mathématiciens*, Edition Inter-Edition, collection Informatique Intelligence Artificielle, 1995, pp225-226 et pp211-225.

- [42] R. Kanigel, *The Man Who Knew Infinity* , A life of the Genius Ramanujan, Edition Abacus, 1991.

- [43] Référence [18] *op. cit.* , pp263-269.

- [44] R. Preston, *The Mountains of Pi*, The New Yorker, March 2, 1992, pp36-67.

- [45] D.V. Chudnowsky, G.V. Chudnowsky, *Approximations and Complex Multiplication According to Ramanujan*, dans *Ramanujan Revisited*, Edition Academic Press, 1987, pp375-472.

- [46] J. M. Borwein, P.B. Borwein, *Class Number Three Ramanujan Type Series for* $1/\pi$, Journal of Computational Appl. Math., vol. 46, 1993, pp281-290.

- [47] M. Wetherfield, *The Enhancement of Machin's Formula by Todd's Process*, Mathematical Gazette, vol. 80, n^o488, July 1996, pp333-344.

- [48] D.H. Lehmer, *On Arcotangent Relations for* π, American Mathematical Monthly, 45(1938), pp657-664.

- [49] A.J. Van der Poorten, *Some Wonderful Formulas*, Proc. Number Theory Conf., Queen's University, Kingston, 1979, pp269-286, MR80i:10054.

- [50] R.W. Gosper, *Strip mining in the abandoned orefields of nineteenth century mathematics*, Computers in Mathematics(Stanford CA, 1986), Lecture Notes in Pure and Apply Mathematics, Dekker, New-York, 125(1990), pp261-284.

- [51] N.J. Lord, *Recent calculation of* π: *The Gauss-Salamin Algorithm*, Mathematical Gazette, 76(1992), pp231-242.

- [52] G. Miel, *Of Calculations Past and Present: The Archimedean Algorithm*, American Mathematical Monthly, 90(1983), pp17-35.

- [53] G.M. Phillips, *Archimedes in the Complex Plane*, American Mathematical Monthly, 91(1984), pp108-114.

- [54] C-.L. Hwang, *More Machin-Type Identities*, Mathematical Gazette, March 1997, pp120-121.

- [55] M. Wetherfield, *Machin Revisited*, Mathematical Gazette, March 1997, pp121-123.

- [56] J.H. Conway, R.K. Guy, *Störmer's Numbers* in *The Book of Numbers*, Edition Springer-Verlag, New-York, 1995, pp245-248.

- [57] F. Viète, *Uriorum de Rebus Mathematicis Responsorum*, Liber VIII, 1593.

- [58] Y. Kanada, *Story of Pi*, Tokyo-Toshyo Co. Ltd., Tokyo, Japan, 1991.

- [59] M. Gardner, *The Scientific American Book of Mathematical Puzzles and Diversions*, *Memorizing Numbers*, Chapter 11, Edition Simon and Schuster, 1959.
- [60] D. Davis, *The Nature and Power of Mathematics*, Edition Princeton University Press, 1993.
- [61] *Hardy, Apologie d'un Mathématicien*, Coll. Un savant, une époque, Edition Belin.
- [62] Référence [3] *op. cit.* , p165.

Bibliographie Complémentaire:

- J-P. Delahaye, *Le Fascinant Nombre* π, Coll. Bibliothèque Pour La Science, Edition Belin.
