

Ajouts au livre "Théorie des graphes" de Jacques Labelle

A) AJOUT D'UNE SECTION 7 AU CHAPITRE 3 PAGE 85

7. Algorithmes divers

Jusqu'ici nous avons rencontré quelques algorithmes permettant de résoudre certains problèmes concrets de théorie des graphes. Les algorithmes de Dijkstra et de Maria Hasse pour trouver un chemin de coût minimum dans un graphe valué (ou un chemin de longueur minimum dans un graphe orienté), les algorithmes de Kruskal et de Prim pour trouver un arbre couvrant de coût minimum dans un graphe simple valué et l'algorithme de Ford-Fulkerson pour trouver un flût de valeur maximum dans un réseau. Ceci n'est que la pointe de l'iceberg puisqu'il en existe une multitude d'autres formant cette partie très florissante des mathématiques discrètes appelée *l'optimisation combinatoire*. Le but de cette section est de présenter quelques autres algorithmes simples et de montrer comment les algorithmes de Dijkstra et de Maria Hasse peuvent être modifiés sans grands efforts pour résoudre d'autres problèmes de recherche de chemins optimaux : chemins de capacité maximum, de fiabilité maximum, de coût maximum, etc.

Commençons par deux algorithmes permettant de trouver $C(x)$, la composante connexe du sommet x , dans un graphe simple $G = (X, A)$. Si $C(x) = X$ alors on sait que G est connexe; de plus en appliquant un tel algorithme successivement à des sommets "non rejoints" on trouvera toutes les composantes connexes $C(x_1), C(x_2), \dots, C(x_k)$ de G . A priori, décider si un graphe simple est connexe ou en trouver les composantes connexes semble trivial. Surtout s'il a peu de sommets et G est donné par une représentation planaire. Cependant, s'il est plutôt donné par une matrice d'adjacence et a plusieurs milliers de sommets, les composantes connexes ne se voient pas si facilement. Même la connexité n'est pas évidente.

I) Algorithmes pour trouver $C(x)$, la composante connexe du sommet x , dans un graphe simple $G = (X, A)$. (Pour $X \supseteq S$, posons $V(S) = \{y \mid \exists x \in S, \{x, y\} \in A\}$).

Posons $S = \{x\}$. Tant que $S \neq S \cup V(S)$ remplacer S par $S \cup V(S)$. Sinon $C(x) = S$.

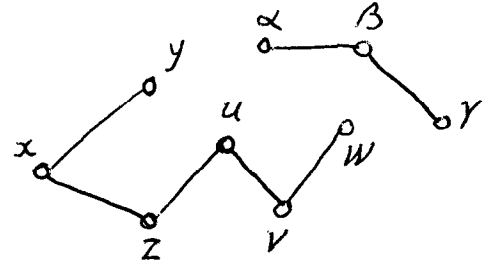
Exemple : Soit $G = (X, A)$ où $X = \{x, y, z, u, v, w, \alpha, \beta, \gamma\}$.

$S = \{x\} \neq V(S) = \{y, z\}$; $S = \{x, y, z\} \neq V(S) = \{x, y, z, u\}$;

$S = \{x, y, z, u\} \neq V(S) = \{x, y, z, u, v\}$;

$S = \{x, y, z, u, v\} \neq V(S) = \{x, y, z, u, v, w\}$;

$S = \{x, y, z, u, v, w\} = V(S) = C(x)$.



Figure

II) L'**algorithme + *** pour trouver $C(x_1)$ dans $G = (X, A)$ où $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Les sommets auront comme étiquettes ou bien rien, ou bien + et *, ou bien seulement *; à la fin $C(x_1)$ sera l'ensemble des sommets avec seulement *.

Début. On donne à x_1 les étiquettes + et *; on pose $p = x_1$.

1) On enlève le + de p et pour tout sommet x_i qui n'a pas d'étiquette et est adjacent à p , on donne à x_i les étiquettes + et *.

2) Tant qu'il y a au moins un sommet avec un +, p devient le plus petit (i.e. de plus petit indice) sommet avec un + et on retourne à 1).

Sinon, $C(x_1) = \{\text{sommets avec (seulement) *}\}$.

Version informatique de l'algorithme + et *. Posons $X = \{1, 2, \dots, n\}$. Le graphe G est "entré dans l'ordinateur" par les listes d'adjacences L_1, L_2, \dots, L_n où pour $1 \leq i \leq n$, $L_i = (j_1, j_2, \dots, j_d)$, $d = d(i)$, $\{i, j_k\} \in A$, $j_1 < j_2 < \dots < j_d$. T sera la liste (variable) des sommets avec un +. $(c(1), c(2), \dots, c(n))$ sera le vecteur caractéristique (variable) des sommets avec un *, i.e. $c(i) = 1$ si le sommet i a * et $c(i) = 0$ sinon.

Algorithme + * (version informatique) pour trouver $C(x_k)$.

- 1) Posons $T = \emptyset$ (liste vide); $\forall i, c(i) = 0$.
- 2) Mettre k dans la liste T ; $c(k) = 1$; imprimer k .
- 3) Si $T = \emptyset$ aller en 8), sinon continuer.
- 4) Soit $i = \min T$; enlever i de T .
- 5) Si L_i est vide aller en 3) sinon continuer.
- 6) Soit $j = \min L_i$; enlever j de L_i ; si $c(j) = 0$ mettre j dans T ; $c(j)$ devient 1; imprimer j .
- 7) Retourner en 5).
- 8) Fin.

Exemple. Soit $G = (X, A)$ où $X = \{1, 2, \dots, 10\}$.

Les listes d'adjacence de G étant $L_1 = (2, 4, 6)$, $L_2 = (1, 5)$, $L_3 = (6, 7)$, $L_4 = (1)$, $L_5 = (2, 6, 7)$, $L_6 = (1, 3, 5)$, $L_7 = (3, 5)$, $L_8 = (9, 10)$, $L_9 = (8, 10)$, $L_{10} = (8, 9)$.

Trouver $C(3)$, la composante connexe du sommet 3. Bien sûr si on trace G on voit que $C(3) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, mais l'ordinateur est aveugle!

$T = \emptyset, c = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$

$T = (3), c = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$; imprimer 3.

$i = 3, j = 6, T = (6), L_3 = (7) \neq \emptyset, c = (0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)$; imprimer 6

$j = 7, T = (6, 7), L_3 = (7) \neq \emptyset, c = (0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0)$; imprimer 7

$i = 6, j = 1, T = (1, 5, 7), L_6 = (3, 5), c = (1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0)$; imprimer 1

... $c = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0)$ et $C(3) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ comme prévu.

III) **Algorithme pour trouver la distance** du sommet x tout autre sommet dans un graphe simple $G = (X, A)$. Dans l'algorithme + *, nous obtenons $C(x)$ pour un sommet donné x dans le graphe simple $G = (X, A)$. Modifions légèrement cet algorithme en introduisant "un compteur" qui dit quand le + disparaît pour calculer plutôt $d(x, y)$ pour $y \in C(x)$.

- 1) On donne à x les étiquettes 0 et *.
- 2) On trouve le sommet y de plus petite étiquette i (et de plus petit indice s'il y en a plusieurs); on souligne l'étiquette i (on aura $d(x, y) = i$) et on donne à tout sommet, adjacent à y et qui n'a pas de *, les étiquettes $i + 1$ et *.
- 3) On applique 2) tant qu'il y a des sommets avec comme étiquette un nombre non souligné. A la fin, si le sommet z reçoit les étiquettes j et *, c'est que $z \in C(x)$ et $d(x, z) = j$.

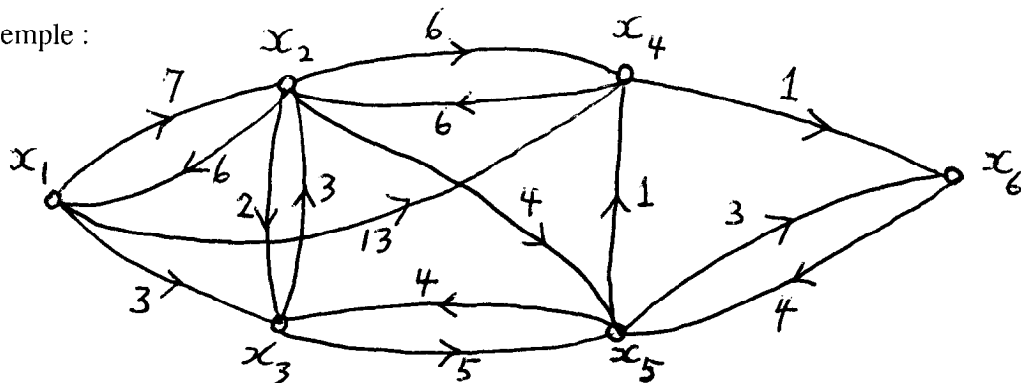
Cet algorithme coïncide avec l'algorithme de Moore rencontré plus tôt. Ici les étiquettes * deviennent redondantes puisqu'un sommet avec * devient un sommet avec une étiquette entière soulignée.

Si le graphe simple $G = (X, A)$ est valué par $\gamma: A \rightarrow (0, \infty)$, une légère modification de l'algorithme + * conduit cette fois à l'algorithme de Dijkstra.

IV) Algorithme de Dijkstra (modifié)

Soit $G = (X, U, \gamma)$ un graphe orienté valué (où on a enlevé les boucles) où $\gamma: U \rightarrow (0, \infty)$, $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ et $U \subseteq X \times X$.

Par exemple :



Figure

A) Pensons à $G = (X, U, \gamma)$ comme un graphe orienté où les flèches ont des coûts. Le coût du chemin $[y_0, y_1, \dots, y_n]$ est $\sum_{i=0}^{k-1} \gamma(y_i, y_{i+1})$. L'algorithme de Dijkstra permettra ici de trouver les coûts minimums de chemins de x_1 à x_i , $2 \leq i \leq n$.

Les sommets reçoivent des étiquettes λ_i qui diminueront de ∞ jusqu'au coût minimum d'un chemin de x_1 à x_i . Au début, $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_i = \infty$, $2 \leq i \leq \infty$. Ensuite, on compare systématiquement $\lambda_i + \gamma(x_i, x_j)$ et λ_j , et λ_j devient le plus petit de ces deux nombres.

Dans notre exemple :

λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
<u>0</u>	∞	∞	∞	∞	∞
	7	<u>3</u>	13	∞	∞
	<u>6</u>		13	8	∞
			12	<u>8</u>	∞
			<u>9</u>		11
					<u>10</u>

Version informatisée de l'algorithme de Dijkstra pour les chemins de coût minimum ($n \geq 2$);

(Ici "devient" s'écrit :=).

- I) Posons $\lambda_1 = 0$, $\lambda_i = \infty$, $i \geq 2$; posons $x_p = x_1$; $S := \{x_1\}$.
- II) Pour $x_i \notin S$, on remplace λ_i par $\min(\lambda_i, \lambda_p + \gamma(x_p, x_i))$, $\forall i$ tel que $(x_p, x_i) \in U$.
- III) $x_p :=$ le sommet de $X - S$ pour lequel λ est minimum. $S := S \cup \{x_p\}$.
- IV) Si $S = X$, Fin; sinon retourner en II.

fin : $\lambda_i =$ coût minimum d'un chemin de x_1 à x_i .

B) Considérons $G = (X, U, \gamma)$ comme un graphe orienté où $\gamma(u)$ représente la *capacité* de la flèche u .

La *capacité* du chemin $[y_0, y_1, \dots, y_k]$ est $\min_{0 \leq i \leq k-1} \{\gamma(y_i, y_{i+1})\}$

L'algorithme de Dijkstra pour trouver les capacités maximum de chemins de x_1 à x_i , $2 \leq i \leq n$ est donné par les règles :

- I) Posons $\lambda_1 = \infty$, $\lambda_i = 0$, $i \geq 2$; posons $x_p = x_1$; $S := \{x_1\}$.
- II) Pour $x_i \notin S$, on remplace λ_i par $\max(\lambda_i, \min(\lambda_p, \gamma(x_p, x_i)))$ où $(x_p, x_i) \in U$.
- III) $x_p :=$ le sommet de $X - S$ pour lequel λ est maximum. $S := S \cup \{x_p\}$.
- IV) Si $S = X$, Fin; sinon retourner en II.

fin : $\lambda_i =$ coût maximum d'un chemin de x_1 à x_i .

Exemple précédent :

λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
<u>∞</u>	0	0	0	0	0
	7	3	<u>13</u>	0	0
	<u>7</u>	3		0	1
		3		<u>4</u>	1
		<u>4</u>			<u>3</u>

- C) Pensons à $\gamma(u)$ (où cette fois $0 < \gamma(u) \leq 1$) comme étant la fiabilité de la flèche u (i.e. u est un "moyen de communication de x_i à x_j " qui lorsqu'utilisé a une probabilité $\gamma(u)$ de bien transmettre un message).

La fiabilité du chemin $[y_0, y_1, \dots, y_k]$ est $\prod_i \gamma(y_i, y_{i+1})$.

L'algorithme de Dijkstra pour trouver les fiabilités maximums de chemins de x_1 à x_i est donné par les règles :

- 1) Posons $\lambda_1 = 1$, $\lambda_i = 0$, $2 \leq i \leq n$; $x_p = x_1$; $S := \{x_1\}$.
- 2) Pour $x_i \notin S$, on remplace λ_i par $\min(\lambda_i, \lambda_p + \gamma(x_p, x_i))$ où $(x_p, x_i) \in U$.
- 3) $x_p :=$ le sommet de $X - S$ pour lequel λ est maximum. $S := S \cup \{x_p\}$.
- 4) Si $S = X$, Fin; sinon retourner en 2).

Fin : λ_i est la fiabilité maximum d'un chemin de x_1 à x_i .

Remarque. Lorsque $G = (X, U, \gamma)$ n'a pas de circuit, on peut également modifier Dijkstra pour trouver le chemin de coût maximum. Ce qui est utile pour des problèmes de *gérance de projet* de travaux où certains travaux doivent en précéder d'autres. Le coût maximum d'un chemin du début

du projet jusqu'à la fin est alors la durée totale minimum de tout le projet.

Terminons cette section en montrant comment l'algorithme de Maria Hasse (qui consistait à calculer les puissances successives d'une matrice jusqu'à ce qu'elles se "stabilisent, i.e. $C, C^2, \dots, C^k = C^{k+1}$) peut également être modifié en changeant les opérations habituelles de produit, $a \cdot b$, et de somme, $a + b$, ainsi que la matrice de départ pour résoudre certains problèmes de recherche de chemins optimaux.

V) Algorithme de Maria Hasse (modifié)

A) Pour un graphe orienté valué $G = (X, U, \gamma)$ de coûts, i.e. $\gamma(u)$ est le coût de la flèche u , $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, soit $C = (c_{ij})$ la matrice des coûts définie par :

$$c_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ \gamma(x_i, x_j) & \text{si } i \neq j \text{ et } (x_i, x_j) \in U \\ \infty & \text{sinon} \end{cases}$$

On calcule C, C^2, C^3, \dots , en remplaçant dans le produit matriciel $a \cdot b$ par $a + b$, et $a + b$ par $\min(a, b)$. Dès que $C^k = C^{k+1}$, cette matrice est la matrice des coûts minimum de chemins. Le coût du chemin $[y_0, y_1, \dots, y_m]$ étant $\sum_{i=0}^{k-1} \gamma(y_i, y_{i+1})$.

B) Pour un graphe orienté valué $G = (X, U, \gamma)$ de capacités, i.e. $\gamma(u)$ est la capacité de la flèche u , $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, soit $K = (k_{ij})$ la matrice des capacités définie par :

$$k_{ij} = \begin{cases} \infty & \text{si } i = j \\ \gamma(x_i, x_j) & \text{si } i \neq j \text{ et } (x_i, x_j) \in U \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On calcule K, K^2, K^3, \dots , en remplaçant dans le produit matriciel $a \cdot b$ par $\min(a, b)$ et $a + b$ par $\max(a, b)$. Dès que $K^k = K^{k+1}$, cette matrice est la matrice des capacités maximums de chemins. La capacité du chemin $[y_0, y_1, y_2, \dots, y_m]$ étant $\min_{0 \leq i \leq k-1} \{\gamma(y_i, y_{i+1})\}$.

C) Pour un graphe orienté valué $G = (X, U, \gamma)$ de fiabilité, i.e. $0 < \gamma(u) \leq 1$ étant la probabilité que la transmission (ou communication) à travers u réussisse, soit $F = (f_{ij})$ la matrice des fiabilités définie par :

$$f_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ \gamma(x_i, x_j) & \text{si } i \neq j \text{ et } (x_i, x_j) \in U \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On calcule F, F^2, F^3, \dots , en remplaçant dans le produit matriciel $a + b$ par $\max(a, b)$, et en conservant $a \cdot b$ tel quel. Dès que $F^k = F^{k+1}$, cette matrice est la matrice des fiabilités maximum de chemins. La fiabilité du chemin $[y_0, y_1, \dots, y_m]$ étant $\prod_i \gamma(y_i, y_{i+1})$.

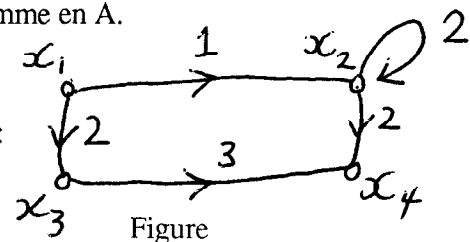
D) Pour un graphe orienté valué sans circuit $G = (X, U, \gamma)$, soit $M = (m_{i,j})$ la matrice des coûts où

$$m_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ \gamma(x_i, x_j) & \text{si } i \neq j \text{ et } (x_i, x_j) \in U. \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On calcule M, M^2, M^3, \dots , en remplaçant $a \cdot b$ par $a + b$ et $a + b$ par $\max(a, b)$. Dès que $M^k = M^{k+1}$, cette matrice est la matrice des coûts maximum de chemins.

Le coût du chemin $[y_0, y_1, y_2, \dots, y_m]$ étant $\sum_{i=0}^{k-1} \gamma(y_i, y_{i+1})$ comme en A.

Exemples : a) Considérons le graphe simple valué suivant :



$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & \infty \\ \infty & 0 & \infty & 2 \\ \infty & \infty & 0 & 3 \\ \infty & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix}, C^2 = C^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \infty & 0 & \infty & 2 \\ \infty & \infty & 0 & 3 \\ \infty & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix}$$

Cette dernière matrice est la matrice des coûts minimums de chemins.

b) Même qu'en a)

$$K = \begin{bmatrix} \infty & 1 & 2 & 0 \\ 0 & \infty & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \infty & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \infty \end{bmatrix}, K^2 = K^3 = \begin{bmatrix} \infty & 1 & 2 & 2 \\ 0 & \infty & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \infty & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \infty \end{bmatrix}$$

Cette dernière matrice est la matrice des capacités maximum de chemins.

- c) Considérons le graphe orienté valué de fiabilité dont la matrice de fiabilité est la suivante:

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 9/10 & 4/5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3/5 \\ 0 & 0 & 1 & 7/10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, F^2 = F^3 = \begin{bmatrix} 1 & 9/10 & 4/5 & 14/25 \\ 0 & 1 & 0 & 3/5 \\ 0 & 0 & 1 & 7/10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cette dernière matrice est la matrice des fiabilités maximum de chemins.

Dans la version informatisée de l'algorithme de Dijkstra, le tableau suivant résume les modifications à apporter.

Problème	Etiquettes		Valeur d'un chemin	λ_p devient	λ_i devient
Chemin minimum	0	∞	$\Sigma \gamma(y_i, y_{i+1})$	min	$\min(\lambda_i, \lambda_p + \gamma(x_p, x_i))$
Chemin de capacité maximum	∞	0	$\min\{\gamma(y_i, y_{i+1})\}$	max	$\max(\lambda_i, \min(\lambda_p, \gamma(x_p, x_i)))$
Chemin d'efficacité maximum	1	0	$\Pi \gamma(y_i, y_{i+1})$	max	$\max(\lambda_i, \lambda_p \cdot \gamma(x_p, x_i))$
Chemin maximum	0	$-\infty$	$\Sigma \gamma(y_i, y_{i+1})$	max	$\max(\lambda_i, \lambda_p + \gamma(x_p, x_i))$

EXERCICES

3.7.1) Considérons le graphe orienté valué dont la matrice des coûts est la suivante :

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 3 & 13 & \infty & \infty \\ 6 & 0 & 2 & 6 & 4 & \infty \\ \infty & 3 & 0 & \infty & 5 & \infty \\ \infty & 6 & \infty & 0 & \infty & 1 \\ \infty & \infty & 4 & 1 & 0 & 3 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Trouver la matrice des coûts minimums de chemins.

3.7.2) Appliquer l'algorithme + * (version informatique) pour trouver la composante connexe du sommet 5 dans le graphe simple $G = (X, A)$ où $X = \{1, 2, 3, 4, \dots, 9\}$, et les listes d'adjacence de G sont $L_1 = (2, 5, 7, 9)$, $L_2 = (1, 7)$, $L_3 = (6)$, $L_4 = (6)$, $L_5 = (1, 9)$, $L_6 = (3, 4, 8)$, $L_7 = (1, 2, 9)$, $L_8 = (6)$, $L_9 = (1, 5, 7)$.

Tracer G et constater que vous avez trouvé la bonne réponse.

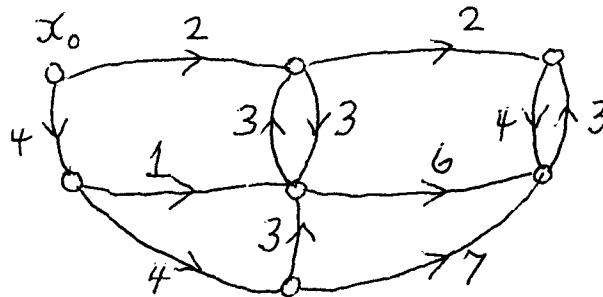
3.7.3) Pour le graphe simple $G = (X, A)$, $X = \{x_1, x_2, \dots, x_{12}\}$ décrit par la matrice d'adjacence

qui suit :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Sans dessiner G , appliquer l'algorithme + * pour en trouver les différentes composantes connexes;
- Appliquer l'algorithme de Moore pour trouver la matrice des distances de chacune des composantes connexes de G ;
- Tracer G et vérifier les résultats trouvés en a) et b):

3.7.4) Dans le graphe orienté valué suivant trouver les coûts minimums de chemins de x_0 à x , pour tout $x \in X$.



3.7.5) Dans le graphe valué précédent si la valeur d'une flèche est sa capacité, trouver les capacités maximums de chemins de x_0 à x , $\forall x$. Remplacer i par $0.i$ et trouver les fiabilités maximums de chemins de x_0 à x .

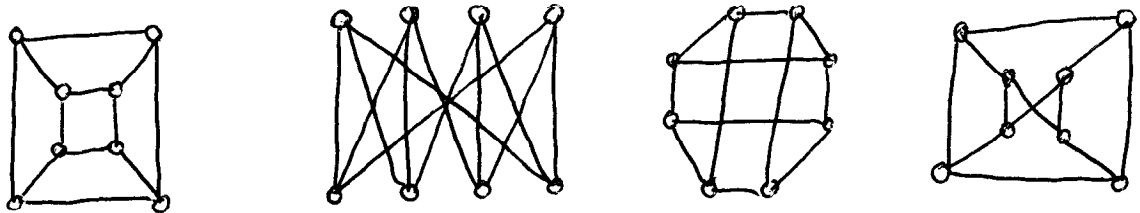
C) AJOUTS D'EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES (PAGE 159 ET SUITE).

CHAPITRE 1 SECTION 1

2') Trouver, à isomorphisme près, tous les graphes simples :

- a) d'ordre 6 ayant exactement 13 arêtes.
- b) réguliers de degré 5 et d'ordre 6, 7 ou 8.

2'') Parmi les quatre graphes simples suivants, lesquels sont isomorphes :



- 2''') a) Combien y a-t-il de graphes simples ayant $\{1, 2, \dots, n\}$ comme ensemble de sommets ?
b) Parmi ceux-ci, combien ont m arêtes ?

Si $G = (X, A)$ est un graphe simple (avec $|X| = n$ et $|A| = m$) alors le degré moyen de G , noté \bar{d}_G est défini par

$$\bar{d}_G = 1/n \sum_{x \in X} d(x) .$$

- c) Trouver, en fonction de n et m , la valeur de \bar{d}_G .
- d) Trouver, parmi tous les graphes simples ayant $\{1, 2, \dots, n\}$ comme ensemble de sommets, la valeur moyenne de \bar{d}_G .
- e) Cette réponse est-elle surprenante ? Pouvez-vous l'obtenir directement ?

4') Soit E un ensemble fini, $|E| = n \geq 1$, et $X = P(E)$. Définissons $G' = (X, A')$ par $\{S, T\} \in A'$ si et seulement si $|S - T| + |T - S| = 1$. Prouver que G' est isomorphe au cube B_n .

5') Monsieur et madame Tremblay accueillent quatre couples pour une soirée mondaine. Les gens se parlent (sauf à eux-mêmes ou à leur conjoint!). À la fin de la soirée madame Tremblay constate que les neuf autres personnes ont toutes parlées à des nombres différents de personnes. En déduire à combien de personnes monsieur Tremblay a parlé (même question pour madame Tremblay).

5'') Trouver, à isomorphisme près, tous les graphes simples dont tous les sommets sauf deux sont de degrés distincts.

9') Soit $G = (X, A)$ un graphe simple, $n = |X|$, $m = |A|$. S'il existe un entier r tel que $\forall x \in X, d(x) = r$ ou $r + 1$, prouver que le nombre de sommet de G de degré r est $(r + 1)n - 2m$.

9'') Combien d'arêtes le graphe-arête du graphe complet K_n , soit $(K_n)^*$, possède-t-il ?

11') Soit $G = (X, A)$ un graphe simple. On dit que G est *fortement régulier* de paramètres (n, r, λ, μ) si G est d'ordre n , régulier de degré r et $\forall x, y \in X$, on a :

$$\{x, y\} \in A \Rightarrow |\{z \in X \mid \{x, z\} \in A, \{y, z\} \in A\}| = \lambda,$$

$$\{x, y\} \notin A \Rightarrow |\{z \in X \mid \{x, z\} \in A, \{y, z\} \in A\}| = \mu.$$

Soit G un graphe simple fortement régulier de paramètres (n, r, λ, μ) . Prouver que :

a) $r(r - \lambda - 1) = (n - r - 1)\mu$;

b) \bar{G} , le complémentaire de G , est fortement régulier de paramètres

$$(n, n-r-1, n - 2r + \mu - 2, n - 2r + \lambda).$$

Prouver que:

c) $(K_m)^*$, le graphe-arête de K_m , est fortement régulier de paramètres

$$(m(m - 1)/2, 2m - 4, m - 2, 4).$$

d) $(K_{m,m})^*$, le graphe-arête de $K_{m,m}$, est fortement régulier de paramètres

$$(m^2, 2m - 2, m - 2, 2).$$

e) $k K_m$, k copies de K_m , est fortement régulier de paramètres $(k m, m - 1, m - 2, 0)$.

CHAPITRE 1 SECTION 3

14') Trouver, à isomorphisme près, tous les graphes simples non-connexes d'ordre 6 ayant 8 arêtes.

14'') Prouver que tout graphe simple ^{qui} admet exactement deux sommets impairs ^{admet} en ~~supposant~~ toujours une chaîne simple reliant ces deux sommets.

14''') Dans un graphe simple $G = (X, A)$, on dit que $S \subseteq X$ est un triangle si $|S| = 3$ et $P_2(S) \subseteq A$. Combien le graphe complet K_n admet-il de triangles ? On dit que $T \subseteq X$ est un carré si $|T| = 4$ et il existe dans G un cycle simple de longueur 4 passant par les 4 sommets de T . Combien le graphe biparti complet $K_{p,q}$ admet-il de carrés ? Combien $K_{p,q}$ admet-il de cycles de longueur 4 ?

CHAPITRE 1 SECTION 4

21') Trouver un cycle eulérien dans le graphe simple B_4 (le cube de dimension 4).

22') (Vrai ou faux ? Justifier la réponse) Soit $G = (X, A)$ un graphe simple:

- a) si $\forall x \in X, d(x)$ est pair alors G est eulérien;
- b) si G est régulier de degré p alors p divise $|A|$;
- c) si G est connexe alors son complémentaire est non-connexe;
- d) si G est hamiltonien alors $\forall x \in X, d(x) > n/2$;
- e) si G n'admet qu'un seul sommet de degré pair, alors son complémentaire aussi.

23') Dire si l'énoncé suivant est vrai ou s'il est faux. Justifier sa réponse.

- a) Un graphe simple a toujours un nombre impair de sommets de degré pair.
- b) Un graphe simple biparti n'a que des cycles de longueur paire.
- c) Tout graphe simple connexe $G = (X, A)$ d'ordre n est tel que: $n - 1 < |A| < n(n - 1)/2$.
- d) Si G est un graphe hamiltonien d'ordre n alors pour tout sommet x , on a $n/2 < d(x)$.
- e) Les deux extrémités d'un pont dans un graphe simple sont toujours des points d'articulation.
- f) Tout graphe simple admettant exactement trois sommets de degré impair est semi-eulérien.

23'') Prouver que:

- a) K_n est réunion de cycles hamiltoniens d'arêtes disjointes si et seulement si n est impair.
- b) K_n est réunion de chaînes (non fermées) hamiltoniennes d'arêtes disjointes si et seulement si n est pair.

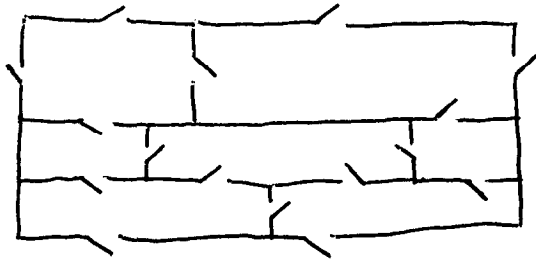
23''') Un cavalier de type (r, s) , $r \geq 1, s \geq 1$, se déplace en "bougeant" de r cases dans une direction et de s cases dans une des deux directions "perpendiculaires".

Soit $C(n, m; r, s)$ le graphe simple du mouvement d'un cavalier de type (r, s) sur un échiquier rectangulaire n par m , $n > 1, m > 1$ (n lignes horizontales de m cases chacune).

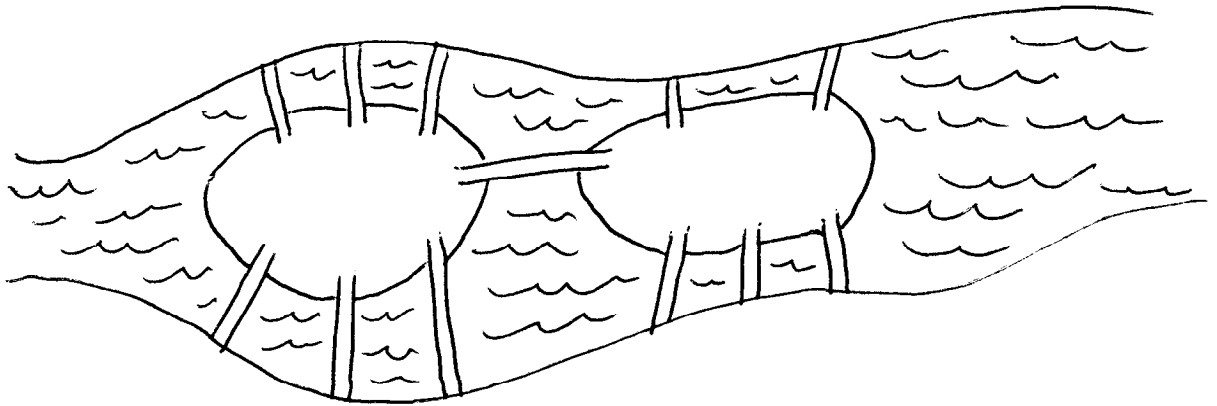
Faire un programme "en interactif" qui demande d'entrer $(n, m; r, s)$ puis qui:

- demande une case $c(i, j)$, où $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$, ($j^{\text{ième}}$ case de la $i^{\text{ième}}$ ligne) et calcule le degré de $c(i, j)$ dans $C(n, m; r, s)$;
- demande deux cases $c(i, j)$ et $c(k, l)$ et calcule leur distance dans $C(n, m; r, s)$;
- trouve une chaîne hamiltonienne dans $C(n, m; r, s)$;
- trouve un cycle hamiltonien.

24') Trouver un trajet traversant chaque porte de la figure suivante une et une seule fois.



24'') Le problème des "ponts de Königsberg" a-t-il une solution pour le plan suivant ?

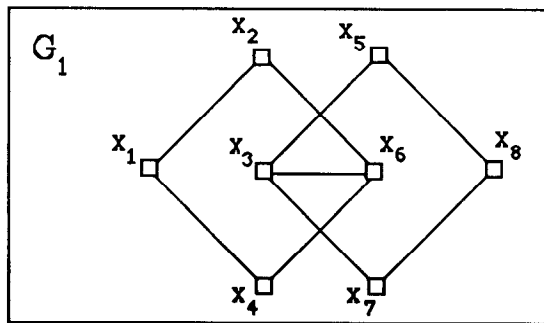


CHAPITRE 1 SECTION 5

24') Prouver qu'un graphe simple connexe dont tous les sommets sont pairs ne peut pas avoir de pont.

27') Considérons le graphe simple G suivant :

- Trouver les points d'articulation de G
- Trouver les ponts de G .
- Trouver les excentricités des sommets de G .
- Trouver le diamètre et le rayon de G .
- Trouver le ou les centres de G .



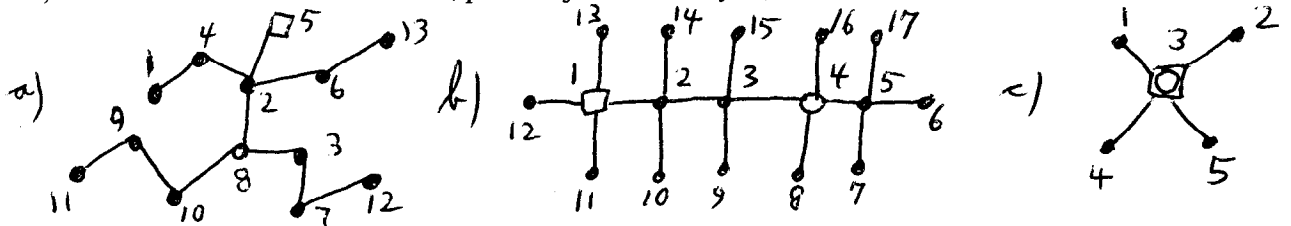
CHAPITRE 1 SECTION 7

35') Soit G un arbre. Prouver que $\delta(G)$, le diamètre de G , est deux si et seulement si G n'admet qu'un seul sommet non-pendant.

35'') Trouver deux arbres non isomorphes d'ordre 6 ayant trois sommets pendants.

36') Soit $G = (X, A)$ un graphe simple. Prouver que G est un arbre si et seulement si G est connexe et pour toute arête a , $G-a$ est non-connexe.

37') Trouver l'endofonction associée, par la bijection de Joyal, au vertébré suivant:



38') Un arbre binaire complet est un arbre muni d'une racine et dont chaque sommet, en fuyant la racine, a :

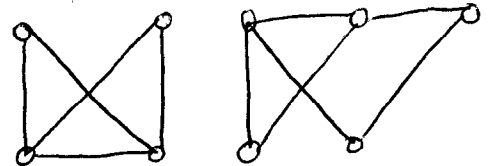
- i) ou bien deux enfants (i.e. deux successeurs), un tel sommet étant dit *intérieur*.
- ii) ou bien aucun enfant (i.e. c'est un sommet *pendant* ou une *feuille*).

Montrer que si T est un arbre binaire complet d'ordre n alors :

- a) n est impair; b) T admet $(n + 1)/2$ feuilles.

38'') Dans le graphe simple G suivant :

- a) Trouver un squelette T .
- b) Trouver le nombre cyclomatique de G .
- c) Trouver le système fondamental de cycles associé à T .



39') Combien de squelettes les graphes simples K_n , le complémentaire de K_n et le complémentaire de $K_{p,q}$ admettent-ils?

39'') Trouver le nombre cyclomatique $\chi(G)$ des graphes simples suivants: K_n , $K_{p,q}$, R_n (la roue), B_n (le cube de dimension n) et le complémentaire de $K_{p,q}$.

40') Trouver le nombre cyclomatique $\chi(G)$ des graphes simples suivants :

- a) C_n , $n \geq 3$; b) le graphe de Petersen ; c) le graphe d'Herschell ; d) un arbre.

41') Soit $p, q, r > 1$ trois entiers. Le graphe triparti complet $G = K_{p,q,r} = (X, A)$ est défini par

$$X = \{x_i \mid 1 < i < p\} \cup \{y_j \mid 1 < j < q\} \cup \{z_k \mid 1 < k < r\} \text{ et}$$

$$A = \{\{x_i, y_j\}, \{y_j, z_k\}, \{z_k, x_i\} \mid 1 < i < p, 1 < j < q, 1 < k < r\}.$$

a) Trouver le nombre cyclomatique $\chi(G)$ de G .

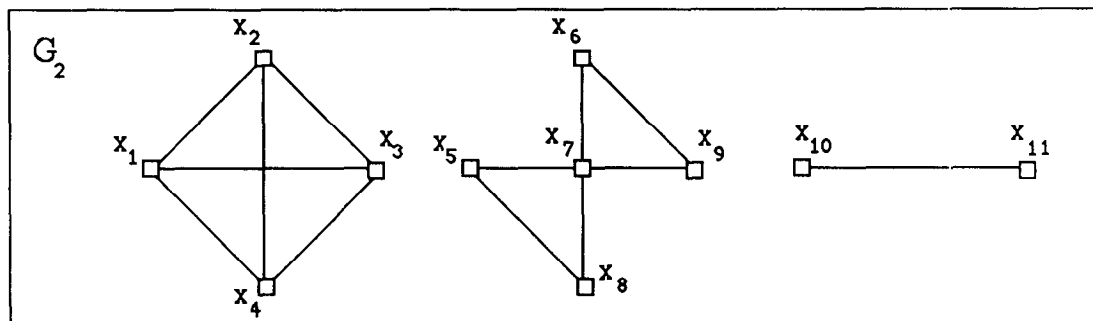
b) Combien de squelettes le complémentaire de G admet-il ?

41'') Considérons le graphe simple G suivant:

a) Trouver un squelette de G .

b) Trouver le système fondamental de cycles associé à ce squelette.

c) Trouver le nombre cyclomatique de G .

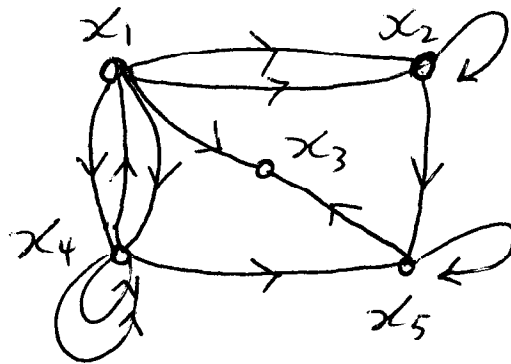


CHAPITRE 2 SECTION 1

46') Prouver qu'il y a une seule façon d'orienter les arêtes du graphe complet K_n de façon que $d^+(i) = i$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

CHAPITRE 2 SECTION 4

55') À l'aide de la matrice d'adjacence, trouver le nombre de chemins de longueur 4 de x_1 à x_3 dans le multigraphe orienté suivant :



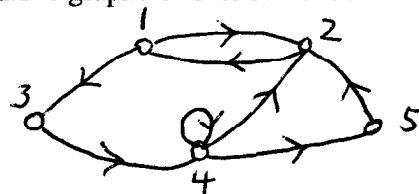
CHAPITRE 2 SECTION 5

59') Pour le graphe orienté suivant $G = (X, U) = (X, \Gamma)$:

- a) Trouver $\Gamma(x_5)$ et $\Gamma^{-1}(x_5)$; b) Trouver $\Gamma^3(x_1)$; c) Tracer G^{-1} et G^2 .
- d) Écrire la matrice des distances.
- e) Écrire la matrice d'adjacente.
- f) Trouver le nombre de circuits de longueur 3.

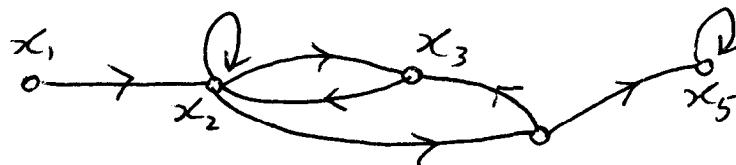
59'') A l'aide de la matrice d'adjacence, trouver dans le graphe orienté suivant :

- a) le nombre de circuits de longueur cinq.
- b) la matrice des distances.



60') Pour le graphe orienté suivant $G = (X, U) = (X, \Gamma)$.

- a) Trouver $\Gamma(x_2)$, $\Gamma^{-1}(x_2)$
- b) $\Gamma^3(x_1)$.
- c) Tracer G^2 .



- d) Trouver le nombre de chemins de longueur 3.
- e) Combien des chemins trouvés en d) sont des chemins de longueur minimum.
- f) Trouver la matrice des distances de G .

61') Trouver la somme totale des entrées de la matrice des distances du cube de dimension n , B_n .

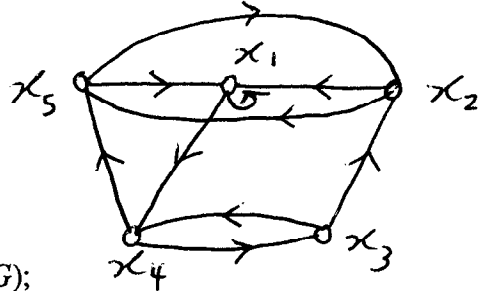
CHAPITRE 2 SECTION 6

63') Prouver que pour tout graphe simple G , on a l'inégalité

$$(\alpha(G)^{-1} + \beta(G)^{-1})^{\text{ord } G} < e = 2.71828\dots$$

Ceci reste-t-il vrai si on remplace e par un nombre plus petit ?

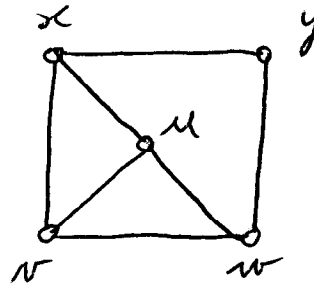
66') Pour le graphe orienté suivant :



- écrire la matrice d'adjacente;
- écrire la matrice des distances;
- tracer G^2 (le carré de G) et G^{-1} (l'inverse de G);
- trouver tous les sous-ensembles intérieurement stables de G et la valeur de $\alpha(G)$;
- trouver tous les sous-ensembles extérieurement stables de G et la valeur de $\beta(G)$.

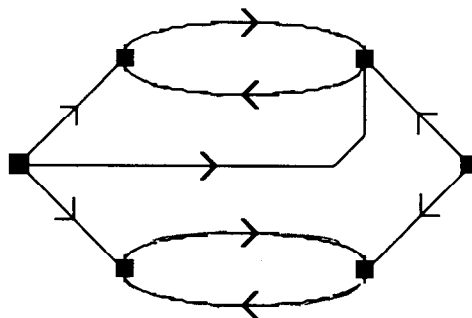
69') Prouver qu'un graphe simple G est tel que $\alpha(G) = 2$ si et seulement si G a au moins une arête et n'a aucun cycle de longueur impair.

69'') Pour le graphe simple suivant :



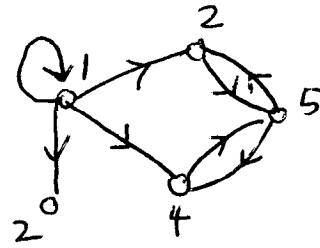
- écrire les ensembles Σ et A ;
- trouver $\alpha(G)$ et $\beta(G)$;
- trouver $\alpha(G)$ et $q(G)$.

69''') Trouver les nombres $\alpha(G)$, $\beta(G)$ et $\chi(G)$ pour le graphe orienté suivant et en trouver tous les noyaux:



CHAPITRE 3 SECTION 2

72') À l'aide de la méthode de Maria Hasse, trouver
la matrice des distances dans le graphe orienté suivant:



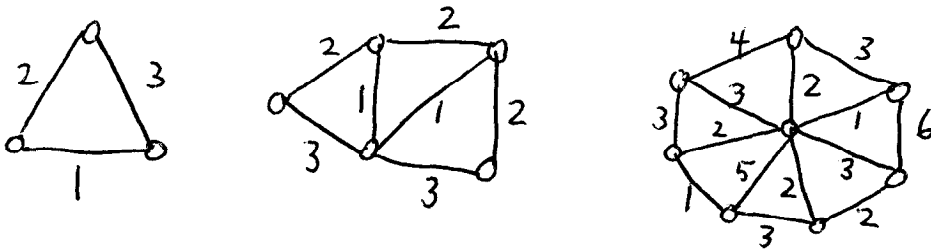
CHAPITRE 3 SECTION 3

73') Trouver la matrice des coûts minimums et la matrice des distances du graphe valué $G = (X, U, \gamma)$ où $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $U = \{(x, y) \mid x \text{ divise } y\}$ et $\gamma(x, y) = y/x$ pour $(x, y) \in U$.

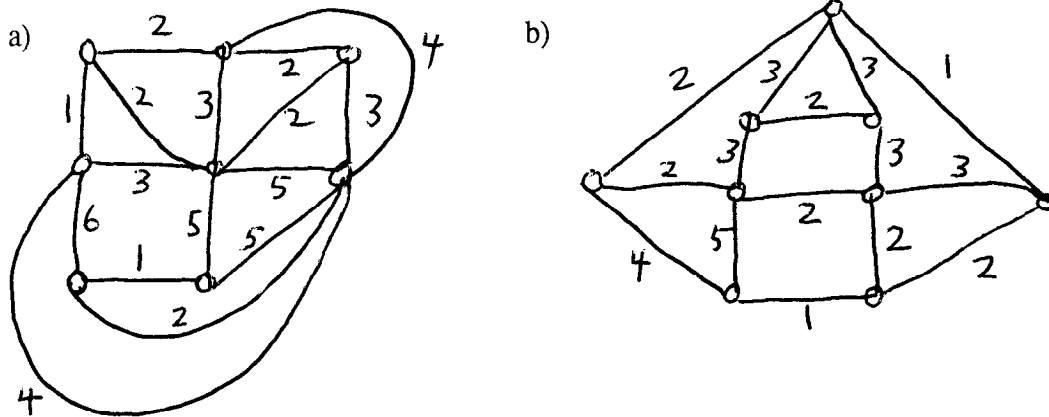
CHAPITRE 3 SECTION 4

75') Soit $G = (X, A, \gamma)$ un graphe simple connexe valué. Montrer que si on enlève successivement une des valeurs de coût maximum se trouvant sur un cycle simple du graphe simple restant, on aboutit à un arbre partiel de coût minimum.

75'') Trouver un squelette de valeur minimum dans le graphe simple valué suivant :



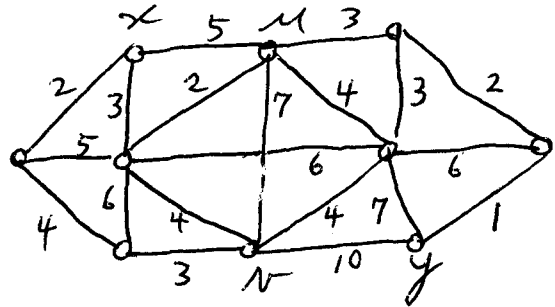
75''') Trouver tous les arbres partiels de coût minimum dans le graphe simple valué suivant avec l'algorithme de Kruskal et avec l'algorithme de Prim.



CHAPITRE 3 SECTION 5

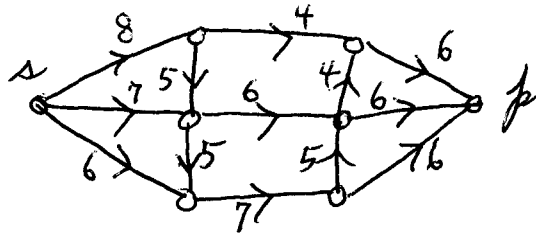
77') Dans le graphe simple valué suivant, trouver :

- un arbre partiel de coût minimum;
- une chaîne de coût minimum de x à y ;
- un arbre de coût minimum parmi tous les arbres passant par les sommets x , u et v .

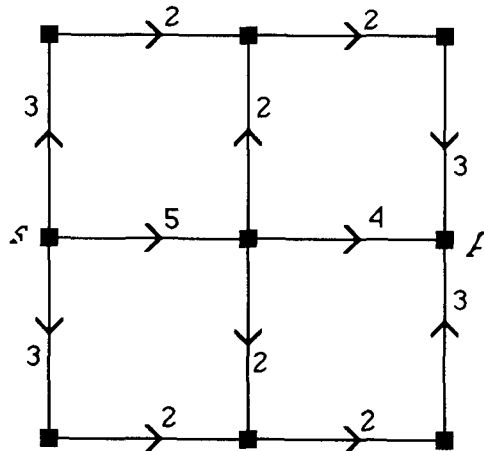


CHAPITRE 3 SECTION 6

77'') Trouver un flot complet non-maximum et un flot maximum dans le réseau suivant :



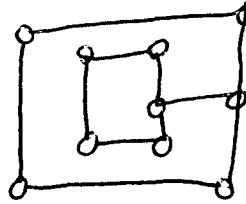
77''') Dans le réseau suivant :



- Trouver un flot complet de valeur 5.
- Au flot complet trouvé en a), appliquer la seconde partie de l'algorithme de Ford-Fulkerson pour obtenir un flot maximum.
- Trouver un sp -séparateur de capacité minimum.

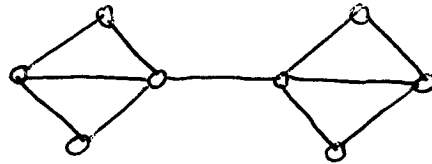
77''') Dans le graphe simple suivant trouver :

- a) un couplage parfait;
- b) un couplage maximal (non parfait).



77''') Dans le graphe simple suivant, trouver un couplage maximal qui ne soit pas parfait.

Combien a-t-il de couplages parfaits ?



77''') Trouver un système de représentants distincts pour la famille d'ensembles suivante :

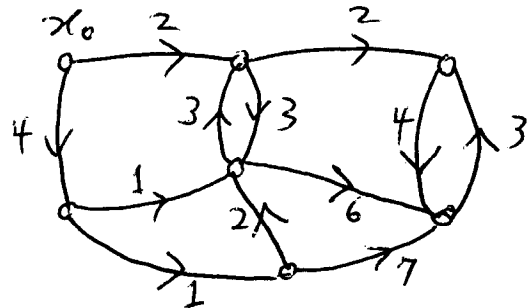
$$\{c, d\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, e\}, \{b, c, d\}$$

Combien y en a-t-il ?

CHAPITRE 3 SECTION 7

XX) Si le graphe simple valué précédent est un graphe de capacité, à l'aide de l'algorithme de Dijkstra (modifié), trouver une chaîne de capacité maximum de x à y .

XX) Considérons le graphe orienté valué suivant :

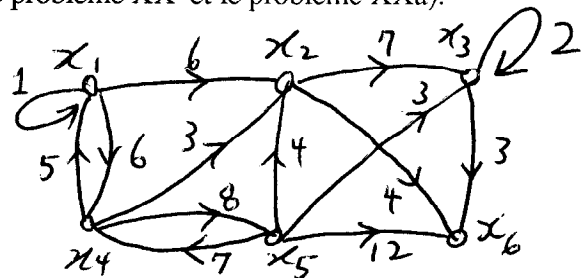


- Avec l'algorithme de Dijkstra trouver les coûts minimums de chemins de x_0 à x , $\forall x \in X$.
- Avec l'algorithme de Dijkstra (modifié) trouver les capacités maximums de chemins de x_0 à x , $\forall x \in X$.

XX) Dans le problème précédent changer la valeur i d'une flèche pour 0. i .

- Avec l'algorithme de Dijkstra, trouver les fiabilités maximums de chemins de x_0 à x .
- Avec l'algorithme de Maria Hasse refaire le problème XX et le problème XXa).

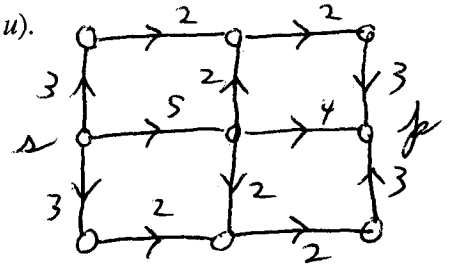
XX) Considérons le graphe orienté G suivant :



- écrire la matrice des distances de G ;
- dessiner le graphe orienté G^2 ;
- décrire explicitement l'ensemble Σ des parties intérieurement stables de G et trouver $\alpha(G)$;
- trouver $\beta(G)$;
- en oubliant les boucles et en considérant que la valeur $\chi(\mu)$ inscrite sur une flèche est sa capacité, écrire la matrice K des capacités de G ;
- appliquer l'algorithme de Dijkstra pour trouver les capacités maximums de chemins de x_1 à x_i , pour $2 \leq i \leq 6$.

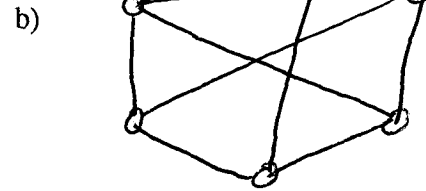
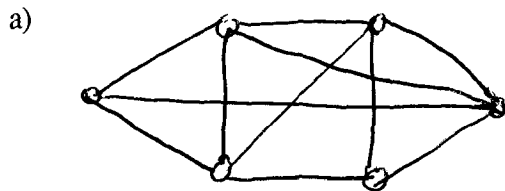
XX) Soit $G = (X, U, \gamma)$ un graphe orienté valué sans circuit.

Supposons que $\gamma: U \rightarrow \{1, 2, 3, \dots\}$ et considérons le multigraphe orienté G' où $\gamma(x, y)$ est le nombre de copies de la flèche (x, y) . Montrer comment modifier l'algorithme de Dijkstra pour calculer le nombre de chemins dans G' de x_0 à x_i où $X = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\}$. Appliquer cet algorithme au graphe orienté valué de la figure ?? pour trouver le nombre de chemins de s à p (où $\gamma(u)$ est le nombre de copies de la flèche u).



CHAPITRE 4 SECTION 1

84') Le graphe suivant est-il planaire ?

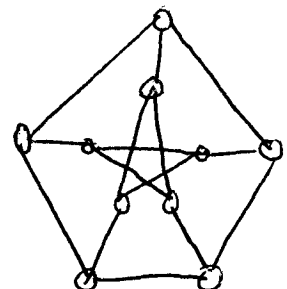


84'') Le nombre de croisements, noté $\nu(G)$, d'un graphe simple G est le nombre minimum de croisements entre les courbes d'une représentation planaire de G . Trouver $\nu(K_n)$ pour $n = 4, 5, 6$, et $\nu(K_{3,3})$.

86') L'épaisseur d'un graphe simple G , notée $\theta(G)$, est le nombre minimum de sous-graphes planaires de G qu'on doit superposer pour obtenir G . Trouver $\theta(K_n)$, pour $\theta(K_n)$ pour $n = 1, 2, 3, \dots, 9$, et $\theta(K_{n,m})$ pour n et m quelconques.

86'') Soit $G = (X, A)$ un graphe simple planaire (sans sommet isolé ou pendent) et n'ayant que des cycles simples de longueur cinq ou plus.

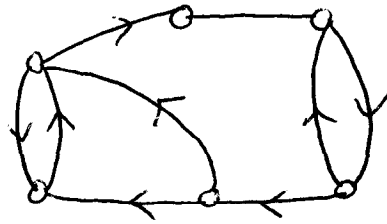
- Prouver qu'on a $5f \leq 2m$ où f est le nombre de faces (d'une représentation planaire de G) et m le nombre d'arêtes.
- Prouver qu'on a $3m \leq 5n - 10$ où n est l'ordre de G .
- En déduire que le graphe de Petersen est non-planaire.



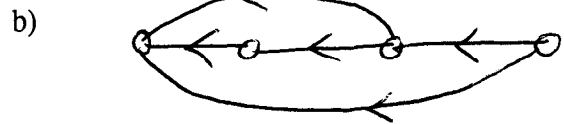
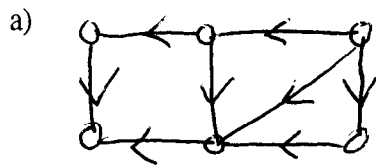
CHAPITRE 5 SECTION 2

95') Pour le graphe orienté suivant trouver :

- a) $\alpha(G)$; b) $\beta(G)$;
- c) les noyaux ; d) une fonction de Grundy.

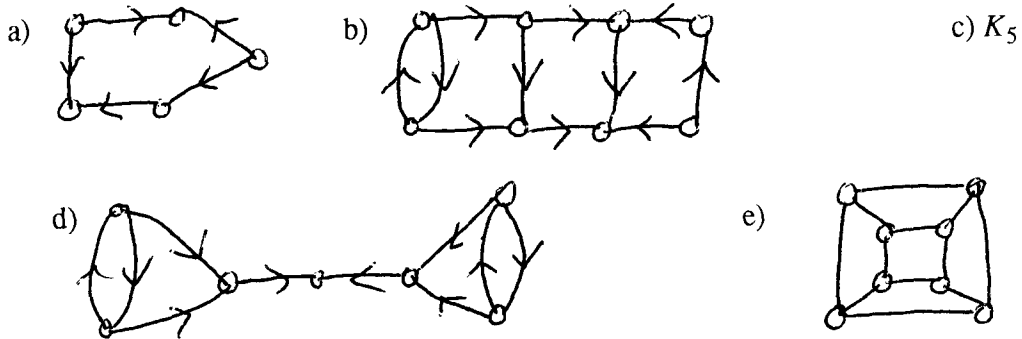


95'') Trouver une fonction de Grundy pour le graphe orienté suivant :



CHAPITRE 5 SECTION 3

98") Trouver une fonction de Grundy pour le graphe orienté suivant :



98''') Soit $G = (X, A)$ le cube de dimension n ,

i.e. $X = \{0, 1\}^n = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) \mid \forall i, \varepsilon_i = 0 \text{ ou } 1\}$ et il y a l'arête de $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ à $(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$ si et seulement $\varepsilon_i = \delta_i$ sauf pour exactement un indice i .

a) Que valent $|X|$ et $|A|$? b) Si $x_0 = (0, \dots, 0)$ et $x = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ que vaut $d(x_0, x)$?

c) Trouver une expression pour la somme des entrées de la matrice des distances de G .

d) Que valent $\alpha(G)$ et $\chi(G)$?

e) Pouver une fonction de Grundy pour G .

99') Pour le jeu de Nim avec 4 piles de 17, 14, 8 et 5 allumettes qui gagne? Est-ce le 1^{er} ou le 2^{ème} joueur? (Ici, gagner veut dire prendre la dernière).

100') Il y a 3 piles de respectivement r, s et t allumettes. Les joueurs A et B jouent suivant les règles i), ii) et iii) :

i) A commence;

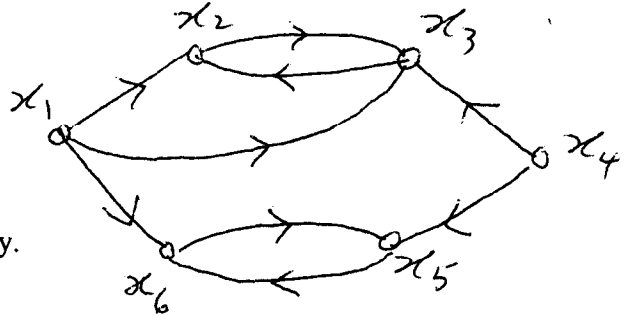
ii) à tour de rôle ils doivent enlever ou bien une ou deux allumettes dans une quelconque des trois piles ou bien une allumette dans la première et une allumette dans la seconde simultanément;

iii) celui qui enlève la dernière allumette gagne.

Suivant les valeurs de r , s et t , qui entre A et B possède une stratégie gagnante et quelle est-elle ? Par exemple qui gagne si $r = 5$, $s = 6$ et $t = 7$?

100'') Pour le graphe orienté suivant:

- Trouver $\alpha(G)$.
- Trouver $\beta(G)$.
- Trouver ses noyaux.
- Trouver ses fonctions de Grundy.



100''') Considérons le jeu suivant.

Il y a deux tas de 6 et 7 allumettes respectivement.

Les joueurs A et B enlèvent à tour de rôle:

- ou bien une ou deux allumettes du premier tas;
- ou bien une ou deux allumettes du second tas;
- ou bien une allumette simultanément dans chacun des deux tas;
- ou bien deux allumettes simultanément dans chacun des deux tas.

Si A commence et le gagnant est celui qui prend la (ou les dernières allumettes) qui a une stratégie gagnante et quelle est-elle ?

100''''') Considérons le jeu suivant entre A et B où A commence. Il y a deux tas de r et s allumettes respectivement et à tour de rôle ils doivent enlever 1 ou 2 allumettes d'un des deux tas ou bien simultanément une allumette de chacun des deux tas. Dans ce jeu le joueur qui prend la dernière allumette perd la partie. Trouver un graphe orienté sur lequel il est équivalent de jouer et une fonction de Grundy pour ce graphe orienté.

100''''') Considérons le jeu suivant entre A et B où A commence et le gagnant est celui qui prend la dernière allumette. Il y a quatre tas de p , q , n et m allumettes respectivement et à tour de rôle ils doivent, ou bien enlever 1, 2 ou 3 allumettes dans un quelconque des tas, ou bien enlever une allumette dans le 1^{er} et le 4^{ième} tas simultanément, ou bien enlever une allumette dans le 2^{ième} et le 3^{ième} tas simultanément. Trouver une fonction de Grundy pour le graphe orienté correspondant à ce jeu. Par exemple pour $p = 10 = q$ et $n = 13 = m$, qui a une stratégie gagnant et quelle est-elle ?

B) Ajouts divers

AJOUT APRÈS FIGURE 104 PAGE 61

DÉFINITION Un *coloriage des sommets* d'un graphe simple $G = (X, A)$ est une façon d'associer à tout sommet de G une couleur de telle sorte que deux sommets adjacents soient toujours de couleurs différentes. C'est un *k-coloriage* s'il utilise k couleurs.

REMARQUE Plus mathématiquement un coloriage des sommets du graphe simple $G = (X, A)$ est une fonction $f: X \rightarrow C$, où C est l'ensemble des couleurs, telle que $\{x, y\} \in A \Rightarrow f(x) \neq f(y)$.

DÉFINITION On appelle nombre chromatique d'un graphe simple $G = (X, A)$, note $\chi(G)$, le plus petit nombre k pour lequel G admette un k -coloriage des sommets.

REPLACE LA DÉFINITION PAGE 62

Si G contient un triangle alors $\chi(G) \geq 3$; plus généralement si G contient un sous-graphe isomorphe à K_m alors, bien sûr, $\chi(G) \geq m$. Il est important de noter que la réciproque est fautive. Par exemple, le cycle C_{2k+1} , $k \geq 2$, ne contient pas de triangle et pourtant $\chi(C_{2k+1}) = 3$; de même la roue R_{2k+1} , $k \geq 2$, ne contient pas de K_4 et pourtant $\chi(R_{2k+1}) = 4$. C'est ce qui rend le calcul de $\chi(G)$ difficile car la cardinalité de la plus grosse *clique* (i.e. sous-graphe complet) n'est qu'une borne inférieure pour $\chi(G)$.

DÉFINITION Un *coloriage des arêtes* d'un graphe simple $G = (X, A)$ est une façon d'associer à toute arête de G une couleur de telle sorte que deux arêtes adjacentes soient toujours de couleurs différentes. C'est un *k-coloriage* des arêtes s'il utilise k couleurs.

REMARQUE Plus mathématiquement un coloriage des sommets du graphe simple $G = (X, A)$ est une fonction $f: A \rightarrow C$, où C est l'ensemble des couleurs, telle que $a, b \in A$, $|a \cap b| = 1 \Rightarrow f(a) \neq f(b)$.

DÉFINITION L'*indice chromatique*, $q(G)$, d'un graphe simple $G = (X, A)$, noté $q(G)$, est le plus petit nombre k pour lequel G admette un k -coloriage des arêtes.

REMARQUE En d'autres mots, on a $q(G) = \chi(G^*)$ où G^* est le graphe-arête de G . Un tel coloriage des arêtes avec k couleurs donne une partition de A en k couplages A_1, A_2, \dots, A_k où $A_i = \{\text{arêtes de la } i^{\text{ème}} \text{ couleur}\}$. (La notion de couplage, donnée à la page 82, est équivalente à celle de facteur linéaire, donnée à la page 26.)

AJOUT APRÈS EXEMPLE 4 PAGE 63

EXEMPLE 5 L'horaire de tête-à-tête lors d'une rencontre internationale de leaders de différents pays. Imaginons que certains présidents, premiers ministres ou dictateurs veuillent se rencontrer dans un face-à-face pour discuter de problèmes communs à leurs deux pays. Considérons le graphe simple $G = (X, A)$ où X est l'ensemble des leaders présents et $\{x, y\} \in A$ si x et y désirent se rencontrer pour une journée d'entretiens à deux. Dans ce cas, $q(G) = k$ nous dit que la rencontre internationale devra durer au moins k jours.

AJOUT AVANT EXERCICES PAGE 64

REMARQUE Pour le graphe simple $G = (X, A)$ posons $\Delta(G) = \max_{x \in X} d(x)$. Il est évident que si $d(x_0) = \Delta(G)$ alors dans tout coloriage des arêtes de G les $\Delta(G)$ arêtes incidentes à x_0 seront de couleurs différentes. On en déduit l'inégalité $q(G) \geq \Delta(G)$. Un théorème, dû à Vising, dit qu'en fait $q(G)$ vaut toujours $\Delta(G)$ ou $\Delta(G) + 1$.

Terminons cette section en décrivant un algorithme, dit *gourmand*, pour trouver un coloriage des sommets du graphe simple $G = (X, A)$ avec au plus $\Delta(G) + 1$ couleurs.

On ordonne les sommets de G , i.e. on pose $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$; on colore x_1 de la couleur 1 puis pour $i \geq 2$, récursivement, on colore x_i de la couleur j si x_i admet des sommets adjacents de couleurs 1, 2, ..., $j-1$ mais pas de couleur j .

EXEMPLE. Considérons le graphe simple G suivant :

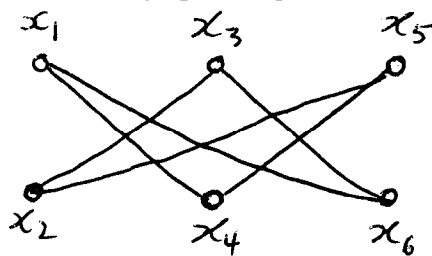


Figure 109

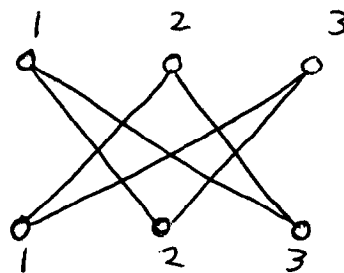


Figure 110

L'algorithme gourmand lui associe le 3-coloriage de la figure 110(ici $3 = \Delta(G) + 1$), cependant $\chi(G) = 2$ puisque G est biparti.

AJOUT au-dessus de la ligne -1 PAGE 94

COROLLAIRE Soit G un graphe simple d'ordre n , où $n \geq 3$, et ayant m arêtes. Si $m > 3n - 6$ alors G est non-planaire.

Preuve. C'est précisément la contraposition du corollaire précédent.

REPLACE LE COROLLAIRE ET SA PREUVE PAGE 95

PROPOSITION Si G est un graphe simple biparti connexe et planaire ayant m arêtes et f faces, alors on a $2f \leq m$.

Preuve : La preuve est semblable à celle de la proposition précédente sauf que cette fois, le graphe simple étant biparti, il n'admet que des cycles simples de longueur paire; chacune des faces est donc bordée par au moins quatre courbes. On en tire $4f \leq \sigma \leq 2m$ et $2f \leq m$.

COROLLAIRE Si G est un graphe simple biparti connexe planaire d'ordre n ayant m arêtes alors on a $m \leq 2n - 4$.

Preuve. Par la formule d'Euler, on a $n - m + f = 2$. Par la proposition précédente, on a $f \leq m/2$. On en déduit $2 \leq n - m/2$ et $m \leq 2n - 4$.

COROLLAIRE Si G est un graphe simple connexe d'ordre n ayant m arêtes et $m > 2n - 4$ alors G est non planaire.

Preuve : C'est précisément la contraposition du corollaire précédent.

COROLLAIRE Le graphe biparti complet $K_{3,3}$ est non-planaire.

Preuve : Dans ce cas, $n = 6$ et $m = 9$; l'inégalité $m > 2n - 4$ est donc vérifiée et $K_{3,3}$ est non-planaire.

REMARQUE Nous constatons donc que G planaire n'est pas équivalent à $m \leq 3n - 6$; de même que G non-planaire n'est pas équivalent à $m > 3n - 6$. En effet K_5 est non-planaire et satisfait $m > 3n - 6$ alors que $K_{3,3}$ est non-planaire et satisfait plutôt $m \leq 3n - 6$ (car $9 \leq 12$).

REPLACE LA REMARQUE PAGE 101

Terminons ce chapitre par quelques mots sur le célèbre problème des quatre couleurs devenu théorème il y a quelques années.

Deux frères, Francis et Frederick Guthrie, se posent la question : «Toute carte géographique plane peut-elle être coloriée avec quatre couleurs.» Frederick, étudiant en mathématiques, pose la question à son professeur, de Morgan, en 1852. Le problème circule puis Cayley le rend populaire en 1878. Kempe (1879) et Tait (1880) en donnent des "preuves". Heawood, quelque dix ans plus tard, réfute la preuve de Kempe et montre que son argument prouve cependant que cinq couleurs suffisent. De même, Petersen montre que la preuve de Tait était fautive. Pendant un siècle le "problème des quatre couleurs" devient le problème ouvert en mathématiques le plus connu car le plus facile à expliquer au commun des mortels. Après les travaux de Heesch et de plusieurs autres, Appel et Haken [15] en 1976 réussissent finalement à prouver le théorème des quatre couleurs en le ramenant à environ deux mille cas dits "inévitables" qu'ils traitent un à un par ordinateur (i.e. en les prouvant tous réductibles).

La preuve est analogue (mais beaucoup plus complexe!) à celle du théorème des cinq couleurs (due à Kempe et Heawood), donnée ici, où les cinq cas inévitables sont l'existence d'un pays à 1, 2, 3, 4 ou 5 côtés.

Remplacer page 154 la solution de l'exercice 150 par :

150) Soit $G = (X, U) = (X, \lambda)$ et $H = (Y, V) = (Y, \gamma)$ où $|X| = n$, $|U| = k$, $|Y| = m$, $|V| = \ell$. Posons $G + H = (X \times Y, W) = (X \times Y, \Gamma)$. Il est commode de penser à $G + H$ comme étant formé de m copies disjointes G_y de G (où $X \times \{y\}$ est l'ensemble des sommets de G_y) avec en plus $\forall (y, y') \in V$, n flèches de la forme $((x, y), (x, y')) \in W$. Le nombre de flèches de $G + H$ est donc $|W| = k \cdot m + \ell \cdot n$.

Si G et H sont eulériens prenons α (resp. β) un circuit eulérien de G (resp. H). $G + H$ est évidemment fortement connexe et W est la réunion disjointe de m copies de α et n copies de β . On a donc

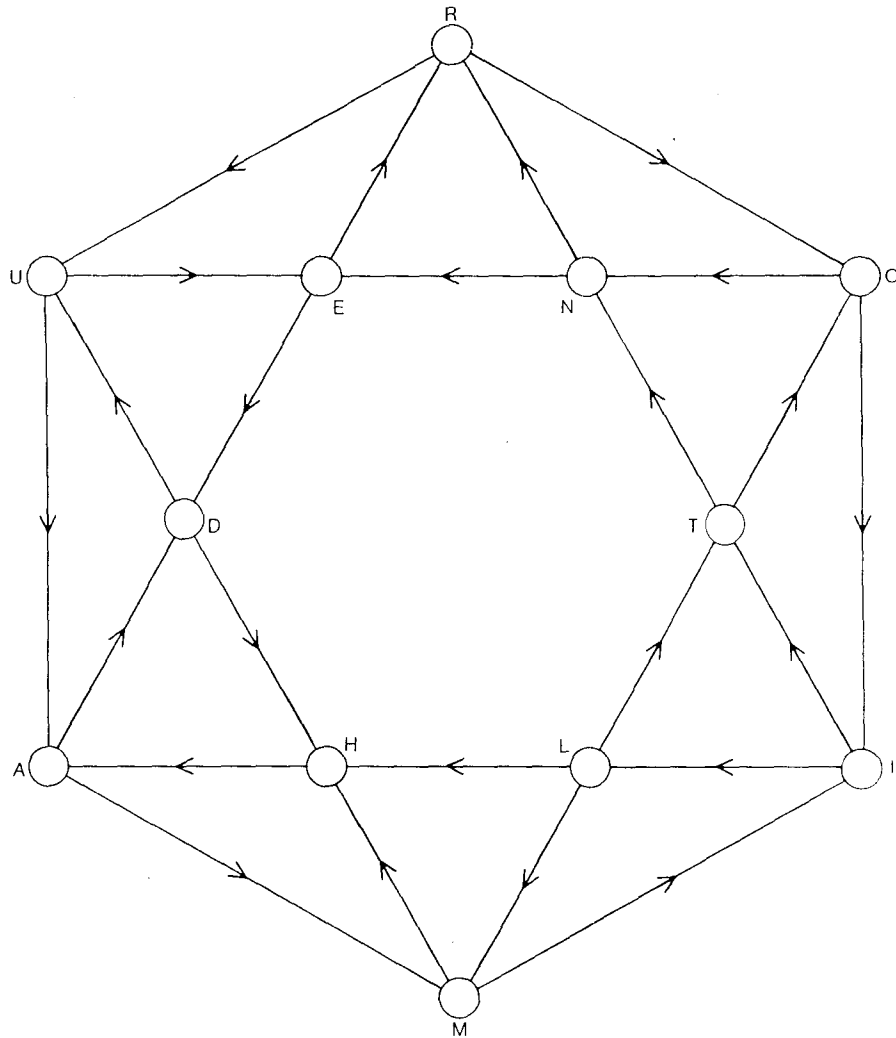
$d_{G+H}^+(x, y) = |\Gamma(x, y)| = |\Gamma^{-1}(x, y)| = d_{G+H}^-(x, y)$, $\forall (x, y)$, et $G + H$ est eulérien. En fait, on peut aussi écrire : $|\Gamma(x, y)| = |\lambda(x)| + |\gamma(y)| = |\lambda^{-1}(x)| + |\gamma^{-1}(y)| = |\Gamma^{-1}(x, y)|$.

Plus explicitement, soit $\alpha = (x_1, x_2, \dots, x_k, x_1)$ (resp. $\beta = (y_1, y_2, \dots, y_\ell, y_1)$). Voici un circuit eulérien (donc de longueur $k \cdot m + \ell \cdot n$) de $G + H$:

$(x_1, y_1), (x_2, y_1), (x_2, y_2), (x_2, y_3), \dots, (x_2, y_\ell), (x_2, y_1),$
 $(x_3, y_1), (x_3, y_2), (x_3, y_3), \dots, (x_3, y_\ell), (x_3, y_1),$
 \dots
 $(x_k, y_1), (x_k, y_2), (x_k, y_3), \dots, (x_k, y_\ell), (x_k, y_1),$
 $(x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_2), (x_3, y_2), \dots, (x_k, y_2), (x_1, y_2),$
 $(x_1, y_3), (x_2, y_3), (x_3, y_3), \dots, (x_k, y_3), (x_k, y_3),$
 \dots
 $(x_1, y_\ell), (x_k, y_\ell), (x_3, y_\ell), \dots, (x_k, y_\ell), (x_1, y_1),$

Inversement supposons $G + H$ eulérien alors $\forall (x, y) \in X \times Y$, on a $d_{G+H}^+(x, y) = d_G^+(x) + d_H^+(x) = d_G^-(x) + d_H^-(y) = d_{G+H}^-(x, y)$. Donc $\forall x \in X, \forall y \in Y$, $d_G^+(x) - d_G^-(x) = d_H^-(y) - d_H^+(y)$. Pour x fixe posons $K = d_G^+(x) - d_G^-(x)$; en sommant sur y on trouve $mK = \sum_{y \in Y} (d_H^-(y) - d_H^+(y)) = \sum_{y \in Y} d_H^-(y) - \sum_{y \in Y} d_H^+(y) = 0$, par le lemme des coups de pieds. Donc $K = d_G^+(x) - d_G^-(x) = 0$. Comme $x \in X$ est arbitraire, $\forall x \in X$, $d_G^+(x) = d_G^-(x)$. On en déduit que G (qui est clairement fortement connexe puisque $G + H$ l'est) est eulérien. Symétriquement H est eulérien.

Trouver l'unique circuit hamiltonien
du graphe orienté suivant :



Solution. Partons de M. La flèche (I, L) est forcée (car c'est la seule arrivant en L). La flèche (H, A) est forcée (car c'est la seule partant de H). La flèche (U, A) est bannie car on arrive à A par (H, A) .

Une étude de cas conduit au chemin (non fermé) hamiltonien : M H A D U E R O I L T N

et à l'unique circuit hamiltonien :

MILTONRUEDHAM

on
RUE D' HAMILTON